Самостоятельная работа
Теория вероятностей и математическая статистика
Финансовая академия

Задание 1.

Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: Y и Z - от 1 до 21 с вероятностью $\frac{1}{21}$, а X только значения 5 и 10, при этом $P(X=5)=\frac{3}{10}$. Найдите вероятность $P(X<Y<Z)$

Решение.

Найдем вероятность $P(X=10)=1-P(X=5)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

Так как величины X, Y, Z независимы, поэтому

$$P\left(X=X_i, Y=Y_j, Z=Z_k\right)=P\left(X=X_i\right)P\left(Y=Y_j\right)P\left(Z=Z_k\right)=P\left(X=X_i\right)\frac{1}{21}\frac{1}{21}=\frac{P\left(X=X_i\right)}{441}$$

Вероятность $P(X<Y<Z)=\sum_{i,j,k} P\left(X_i<Y_j<Z_k\right)=\sum_{\substack{i,j,k \\ X_i<Y_j<Z_k}} \frac{P\left(X=X_i\right)}{441}$

Для $X_i=5$ получаем:

Если $Y_j=6$, то Z_k может принимать значения от 7 до 21, то есть 21-7+1=15 значений;

Если $Y_j=7$, то Z_k может принимать значения от 8 до 21, то есть 21-8+1=14 значений;

…

Если $Y_j=20$, то Z_k может принимать значение только 21, то есть одно значение.

Для $X_i=10$ получаем:

Если $Y_j=11$, то Z_k может принимать значения от 12 до 21, то есть 21-12+1=10 значений;

Если $Y_j = 12$, то Z_k может принимать значения от 13 до 21, то есть 21-13+1=9 значений;

…

Если $Y_j = 20$, то Z_k может принимать значение только 21, то есть одно значение.

Тогда, получаем

$$P(X<Y<Z) = \sum_{\substack{i,j,k \\ X_i<Y_j<Z_k}} \frac{P(X=X_i)}{441} = \sum_{\substack{j,k \\ Y_j<Z_k}} \frac{P(X=5)}{441} + \sum_{\substack{j,k \\ Y_j<Z_k}} \frac{P(X=10)}{441} =$$

$$= \frac{3}{10}\frac{1}{441}(1+2+3+...+15) + \frac{7}{10}\frac{1}{441}(1+2+3+...+10) = \frac{3}{10}\frac{1}{441}\frac{15(15+1)}{2} + \frac{7}{10}\frac{1}{441}\frac{10(10+1)}{2} =$$

$$= \frac{149}{882}$$

Задание 2.

Распределение дискретной случайной величины *X* задано таблицей

X	1	4	7
p	0,4	0,4	0,2

Найдите дисперсию *D*(*X*).

Решение.

Найдем математическое ожидание

$$EX = 1*0.4 + 4*0.4 + 7*0.2 = 3.4$$

Найдем дисперсию

$$DX = 1^2*0.4 + 4^2*0.4 + 7^2*0.2 - 3.4^2 = 5.04$$

Задание 3.

Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна 0.7, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,1, а вероятность проигрыша 70 рублей равна 0,2. Найдите дисперсию капитала игрока после 5 партий.

Решение

Представим случайную величину K, капитал игрока, в виде суммы $K = K_0 + K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5$, где K_0 - начальный капитал, K_i - изменение капитала игрока в результате i-ой партии (i = 1,2,...,5). Тогда

$$D(K_i) = E(K_i^2) - E^2(K_i) = \left(20^2 \cdot 0.7 + (-10)^2 \cdot 0.1 + (-70)^2 \cdot 0.2\right) - (20 \cdot 0.7 - 10 \cdot 0.1 - 70 \cdot 0.2)^2 = 387$$

Следовательно, дисперсия капитала игрока после 5 сыгранных независимых партий составит

$$D(K) = D(K_0 + K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5) = 5D(K_i) = 5 \cdot 387 = 1935$$

Задание 4.

Случайные величины $X_1, ..., X_{245}$ независимы и распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 5,\ p = \frac{3}{7}$. Найдите математическое ожидание

$$E\left((X_1 + ... + X_{245})^2\right)$$

Решение.

Воспользуемся свойством математического ожидания для независимых величин

$$E\left(\left(X_1+\ldots+X_{245}\right)^2\right)=E\left(\sum_{k=1}^{245}X_k^2+2\sum_{\substack{i<j\\ i=1..245\\ j=1..245}}X_iX_j\right)=E\left(\sum_{k=1}^{245}X_k^2\right)+2E\left(\sum_{\substack{i<j\\ i=1..245\\ j=1..245}}X_iX_j\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{245}E\left(X_k^2\right)+2\sum_{\substack{i<j\\ i=1..245\\ j=1..245}}E\left(X_iX_j\right)=\sum_{k=1}^{245}E\left(X_k^2\right)+2\sum_{\substack{i<j\\ i=1..245\\ j=1..245}}E\left(X_i\right)E\left(X_j\right)$$

Так как все величины распределены по биномиальному закону с параметрами

$n=5,\ p=\frac{3}{7}$, поэтому

$$EX_t=np=\frac{15}{7},DX_t=npq=\frac{15}{7}\frac{4}{7}=\frac{60}{49},E\left(X_t^2\right)=DX_t+E^2X_t=\frac{60}{49}+\left(\frac{15}{7}\right)^2=\frac{285}{49}$$

Тогда,

$$E\left(\left(X_1+\ldots+X_{245}\right)^2\right)=\sum_{k=1}^{245}E\left(X_k^2\right)+2\sum_{\substack{i<j\\ i=1..245\\ j=1..245}}E\left(X_i\right)E\left(X_j\right)=245\cdot\frac{285}{49}+2\frac{245(245-1)}{2}\frac{15}{7}\frac{15}{7}=$$

$$=275925$$

Задание 5.

Случайные величины $X_1,\ldots,X_6$ распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 2. Найдите математическое ожидание $E\left(X_1^2+\ldots+X_6^2\right)$

Решение.

Воспользуемся свойством математического ожидания

$$E\left(X_1^2+\ldots+X_6^2\right)=E\left(X_1^2\right)+\ldots+E\left(X_6^2\right)$$

Так как $E\left(X_i^2\right)=DX_i+E^2X_i$, тогда получаем

$$E\left(X_1^2+\ldots+X_6^2\right)=DX_1+E^2X_1+\ldots+DX_6+E^2X_6$$

Для распределения Пуассона имеем $EX=DX=\lambda$, тогда получаем

$$E\left(X_1^2+\ldots+X_6^2\right)=\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda+\lambda^2=6\left(\lambda+\lambda^2\right)=6\left(2+2^2\right)=36$$