МИРЭА. Типовой расчет по математическому анализу

Контрольные задания по теме Комплексные числа, ТФКП.

Задание 1. Решить уравнения, множество решении изобразить на комплексной плоскости

А) $z^4 + 81i = 0$ Б) $4e^{-iz} + 3\cos z = 1$

Решение

А)

$$z^4 = -81i = 81(0-1i) = 81\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

По формуле Муавра получаем

$$z_k = \sqrt[4]{81\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)} = 3\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{4}\right), k=\overline{0..3}$$

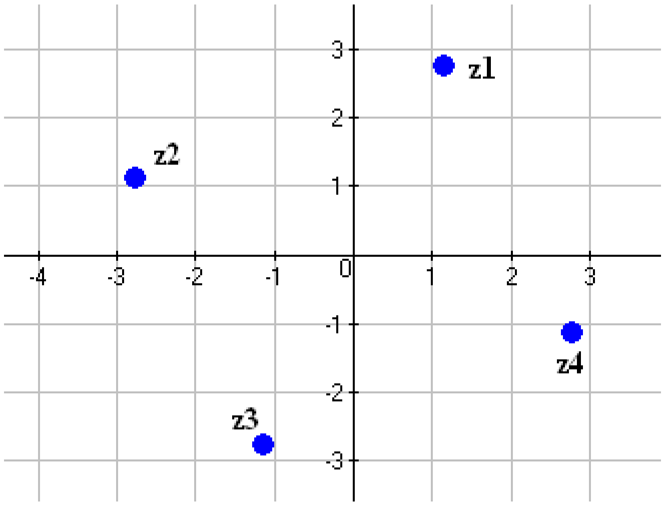
$$z_0 = 3\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi*0}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi*0}{4}\right) = 3\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi*1}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi*1}{4}\right) = 3\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi*2}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi*2}{4}\right) = 3\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$$

$$z_3 = 3\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi*3}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi*3}{4}\right) = 3\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}\right)$$

Изобразим точки на плоскости



Б)

$4e^{-iz}+3\cos z=1$

Пусть $z=x+yi;x,y\in R$, тогда получаем

$$4e^{-i(x+yi)}+3\cos(x+yi)=1$$
$$4e^{y-ix}+3(\cos xchy-i\sin xshy)=1$$
$$4e^{y}(\cos(-x)+i\sin(-x))+3(\cos xchy-i\sin xshy)=1$$
$$4e^{y}\cos x-4ie^{y}\sin x+3\cos xchy-3i\sin xshy=1$$
$$(4e^{y}\cos x+3\cos xchy)+i(-4e^{y}\sin x-3\sin xshy)=1$$
$$\begin{cases}4e^{y}\cos x+3\cos xchy=1\\ -4e^{y}\sin x-3\sin xshy=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4e^{y}\cos x+3\cos xchy=1\\ \sin x(-4e^{y}-3shy)=0\end{cases}$$

1) Из второго уравнения получаем $\sin x=0\Rightarrow\cos x=\pm1$ и первое уравнение запишется в виде

$$4e^{y}+3chy=\pm1$$
$$4e^{y}+3\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=\pm1$$
$$8e^{y}+3e^{y}+3e^{-y}=\pm2$$
$$11e^{y}+3e^{-y}=\pm2$$

Обозначим $e^y = t \Rightarrow e^{-y} = \frac{1}{t}$, тогда получаем

$$11t + \frac{3}{t} = \pm 2$$
$$11t^2 \pm 2t + 3 = 0$$
$$D = 4 - 11*3*4 < 0$$

Значит, уравнение корней не имеет.

2) Из второго уравнения получаем $-4e^y - 3shy = 0$

$$-4e^y - 3shy = 0$$
$$4e^y - 3\frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0$$
$$8e^y - 3e^y + 3e^{-y} = 0$$
$$5e^y = -3e^{-y}$$
$$e^{2y} = -\frac{3}{5} < 0$$

Значит, уравнение корней не имеет.

Тогда, получаем, что данному уравнению не соответствует ни одна точка координатной плоскости.

Задание 2. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные

А) $f(z) = iz^3 + e^{-2\bar{z}}$ Б) $f(z) = shz^2$

Решение

А)

Пусть $z = x + yi$, тогда получаем

$$f(z)=i(x+yi)^3+e^{-2\overline{(x+yi)}}=i\left(x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i\right)+e^{-2(x-yi)}=x^3i-3x^2y-3xy^2i+y^3+e^{-2x+2yi}=$$

$$=x^3i-3x^2y-3xy^2i+y^3+e^{-2x}(\cos 2y+i\sin 2y)=\left(-3x^2y+y^3+e^{-2x}\cos 2y\right)+i\left(x^3-3xy^2+e^{-2x}\sin 2y\right)$$

Тогда, получаем

$$u(x,y)=-3x^2y+y^3+e^{-2x}\cos 2y$$
$$v(x,y)=x^3-3xy^2+e^{-2x}\sin 2y$$

Проверим выполнение условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy-2e^{-2x}\cos 2y;\frac{\partial v}{\partial y}=-6xy+2e^{-2x}\cos 2y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3x^2+3y^2-2e^{-2x}\sin 2y;\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-3y^2-2e^{-2x}\sin 2y$$

Для выполнения условии Коши-Римана необходимо, чтобы

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow -6xy-2e^{-2x}\cos 2y=-6xy+2e^{-2x}\cos 2y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow -3x^2+3y^2-2e^{-2x}\sin 2y=-\left(3x^2-3y^2-2e^{-2x}\sin 2y\right)$$

Равенства получились неверными, значит, функция не является аналитичной на всей плоскости. Найдем области, где она является аналитичной

$$-6xy-2e^{-2x}\cos 2y=-6xy+2e^{-2x}\cos 2y\Rightarrow e^{-2x}\cos 2y=0$$
$$-3x^2+3y^2-2e^{-2x}\sin 2y=-\left(3x^2-3y^2-2e^{-2x}\sin 2y\right)\Rightarrow e^{-2x}\sin 2y=0$$

Получаем, что и синус и косинус должны быть одновременно равны 0, чего быть не может, значит, функция не является аналитичной

Б)

Пусть $z=x+yi$, тогда получаем

$$f(z)=sh(x+yi)^2=sh\left(x^2+2xyi-y^2\right)=sh\left(\left(x^2-y^2\right)+2xyi\right)=\frac{e^{\left(x^2-y^2\right)+2xyi}-e^{-\left(\left(x^2-y^2\right)+2xyi\right)}}{2}=$$

$$=\frac{e^{x^2-y^2}\left(\cos 2xy+i\sin 2xy\right)-e^{-x^2+y^2}\left(\cos(-2xy)+i\sin(-2xy)\right)}{2}=$$

$$=\frac{e^{x^2-y^2}\cos 2xy-e^{-x^2+y^2}\cos 2xy}{2}+i\frac{e^{x^2-y^2}\sin 2x+e^{-x^2+y^2}\sin 2xy}{2}$$

Тогда, получаем

$$u(x,y)=\frac{e^{x^2-y^2}\cos 2xy-e^{-x^2+y^2}\cos 2xy}{2}$$

$$v(x,y)=\frac{e^{x^2-y^2}\sin 2x+e^{-x^2+y^2}\sin 2xy}{2}$$

Проверим выполнение условия Коши-Римана

$$u(x,y)=\frac{e^{x^2-y^2}\cos 2xy-e^{-x^2+y^2}\cos 2xy}{2}$$

$$v(x,y)=\frac{e^{x^2-y^2}\sin 2xy+e^{-x^2+y^2}\sin 2xy}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy+2xe^{-x^2+y^2}\cos 2xy+2ye^{-x^2+y^2}\sin 2xy}{2}=$$

$$=xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-ye^{x^2-y^2}\sin 2xy+xe^{-x^2+y^2}\cos 2xy+ye^{-x^2+y^2}\sin 2xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy+2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy+2ye^{-x^2+y^2}\sin 2xy+2xe^{-x^2+y^2}\cos 2xy}{2}=$$

$$=-ye^{x^2-y^2}\sin 2xy+xe^{x^2-y^2}\cos 2xy+ye^{-x^2+y^2}\sin 2xy+xe^{-x^2+y^2}\cos 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy-2ye^{-x^2+y^2}\cos 2xy+2xe^{-x^2+y^2}\sin 2xy}{2}=$$

$$=-ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-xe^{x^2-y^2}\sin 2xy-ye^{-x^2+y^2}\cos 2xy+xe^{-x^2+y^2}\sin 2xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy+2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-2xe^{-x^2+y^2}\sin 2xy+2ye^{-x^2+y^2}\cos 2xy}{2}=$$

$$=xe^{x^2-y^2}\sin 2xy+ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-xe^{-x^2+y^2}\sin 2xy+ye^{-x^2+y^2}\cos 2xy$$

Для выполнения условии Коши-Римана необходимо, чтобы

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-ye^{x^2-y^2}\sin 2xy+xe^{-x^2+y^2}\cos 2xy+ye^{-x^2+y^2}\sin 2xy=$$
$$=-ye^{x^2-y^2}\sin 2xy+xe^{x^2-y^2}\cos 2xy+ye^{-x^2+y^2}\sin 2xy+xe^{-x^2+y^2}\cos 2xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow -ye^{x^2-y^2}\sin 2xy+xe^{x^2-y^2}\cos 2xy+ye^{-x^2+y^2}\sin 2xy+xe^{-x^2+y^2}\cos 2xy=$$
$$=-\left(xe^{x^2-y^2}\sin 2xy+ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-xe^{-x^2+y^2}\sin 2xy+ye^{-x^2+y^2}\cos 2xy\right)$$

Равенства получились верными, значит, функция является аналитичной на всей плоскости.

Значит,

$$f'=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i=$$
$$=\left(xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-ye^{x^2-y^2}\sin 2xy+xe^{-x^2+y^2}\cos 2xy+ye^{-x^2+y^2}\sin 2xy\right)+$$
$$+i\left(xe^{x^2-y^2}\sin 2xy+ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-xe^{-x^2+y^2}\sin 2xy+ye^{-x^2+y^2}\cos 2xy\right)$$

Задание 3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $\begin{cases} z^2+\left(\overline{z}\right)^2\geq 2 \\ \operatorname{Im}\dfrac{1}{z}\leq\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Решение

Пусть $z=x+yi$, тогда получаем

$$z^2+(\overline{z})^2=(x+yi)^2+(x-yi)^2=x^2+2xyi-y^2+x^2-2xy-y^2=2x^2-2y^2\geq 2$$

$$x^2-y^2\geq 1$$

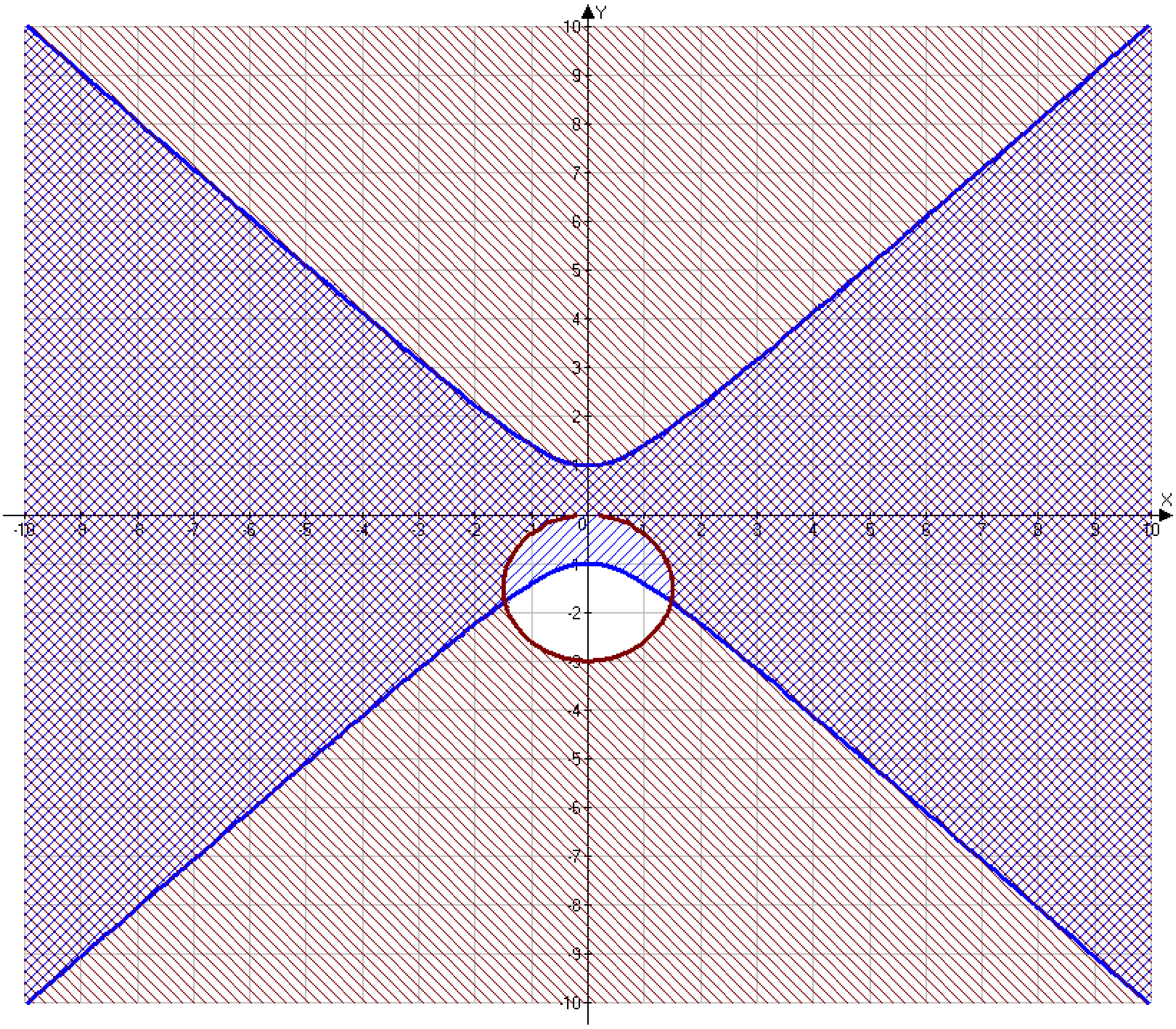
$$\mathrm{Im}\frac{1}{z}=\mathrm{Im}\frac{1}{x+yi}=\mathrm{Im}\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\mathrm{Im}\frac{x-yi}{x^2+y^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{3}$$

$$x^2+y^2\geq -3y$$

$$x^2+\left(y^2+3y\right)\geq 0$$

$$x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2\geq\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Первое полученное уравнение – это внешняя часть гиперболы $x^2-y^2=1$, а второе уравнение определяет внешнюю часть окружности $x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$



Область, заштрихованная дважды и есть искомая область

Задание 4. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} \overline{z}^2 dz$ по отрезку $AB: A(-1;0), B(2;-3)$

Решение

Найдем уравнение прямой $AB: \frac{x+1}{2+1} = \frac{y-0}{-3-0} \Rightarrow y = -x-1$

Тогда,

$$\int_{AB} \bar{z}^2 dz = \int_{AB} \overline{(x+yi)}^2 d(x+yi) = \int_{AB} (x-yi)^2 d(x+yi) = \int_{-1}^{2} \left(x+(-x-1)i\right)^2 d\left(x+(-x-1)i\right) =$$

$$=(1-i)\int_{-1}^{2}\left(x^2+2x(-x-1)i-(-x-1)^2\right)dx=(1-i)\int_{-1}^{2}\left(x^2-2x^2i-2xi-x^2-2x-1\right)dx=$$

$$=(1-i)\int_{-1}^{2}\left(-2x^2i-2xi-2x-1\right)dx=(1-i)\left[-2\frac{x^2}{3}i-x^2i-x^2-x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=(1-i)\left[-2\frac{2^2}{3}i-2^2i-2^2-2\right]-(1-i)\left[-2\frac{(-1)^2}{3}i-(-1)^2i-(-1)^2-(-1)\right]=-15-3i$$

Задание 5

Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки и найти вычет в точке z_0

А) $f(z)=zsh\left(\frac{3}{z-i}\right), z_0=i$ Б) $f(z)=\frac{\cos^2 z-\cos z^2}{z^5}, z_0=0$

Решение

А)

Используем разложение функции $y=shx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Тогда, получаем

$$f(z)=zsh\left(\frac{3}{z-i}\right)=(z-i+i)sh\left(\frac{3}{z-i}\right)=(z-i)sh\left(\frac{3}{z-i}\right)+ish\left(\frac{3}{z-i}\right)=$$

$$=(z-i)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{z-i}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{z-i}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{1}{(z-i)^{2k}}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{1}{(z-i)^{2k+1}}$$

Запись функции представляет собой главную часть разложения Лорана, значит, $z=i$ является существенной особой точкой.

Так как коэффициент при $(z-i)^{-1}$ равен $i\frac{3^{2*0+1}}{(2*0+1)!}=3i$, поэтому вычет равен $3i$

Б)

$$f(z)=\frac{\cos^2 z-\cos z^2}{z^5}=\frac{\frac{1+\cos 2z}{2}-\cos z^2}{z^5}=\frac{1}{2z^5}+\frac{\cos 2z}{2z^5}-\frac{\cos z^2}{z^5}=\frac{1}{2z^5}+\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2z)^{2k}}{(2k)!}}{2z^5}-\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z^2)^{2k}}{(2k)!}}{z^5}=$$

$$=\frac{1}{2z^5}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}z^{2k-5}}{2(2k)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{4k-5}}{(2k)!}=$$

$$=\frac{1}{2z^5}+\frac{(-1)^0 2^0 z^{-5}}{2(0)!}+\frac{(-1)^1 2^2 z^{2-5}}{2(2)!}+\frac{(-1)^2 2^4 z^{4-5}}{2(4)!}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}z^{2k-5}}{2(2k)!}-\frac{(-1)^0 z^{-5}}{0!}-\frac{(-1)^1 z^{4-5}}{1!}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{4k-5}}{(2k)!}=$$

$$=\frac{1}{2z^5}+\frac{1}{z^5}-\frac{2}{z^3}+\frac{1}{3}\frac{1}{z}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}z^{2k-5}}{2(2k)!}-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{4k-5}}{(2k)!}=$$

$$=\frac{1}{2z^5}-\frac{2}{z^3}+\frac{4}{3}\frac{1}{z}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}z^{2k-5}}{2(2k)!}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{4k-5}}{(2k)!}$$

Запись функции представляет собой сумму главную и правильной части разложения Лорана, причем главная часть содержит конечное число членов. Значит, $z=0$ является полюсом пятого порядка

Так как коэффициент при z^{-1} равен $\frac{4}{3}$, поэтому вычет равен $\frac{4}{3}$

Задание 6. Найти все разложения функции $f(z)=\frac{4z-1}{z(z+3)^2}$ в ряд Лорана по степеням $z+3$

Решение

Разложим функцию в сумму элементарных дробей

$$\frac{4z-1}{z(z+3)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+3}+\frac{C}{(z+3)^2}=\frac{A(z+3)^2+Bz(z+3)+Cz}{z(z+3)^2}$$

$$A(z+3)^2+Bz(z+3)+Cz=4z-1$$

$$A\left(z^2+6z+9\right)+B\left(z^2+3z\right)+Cz=4z-1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 6A+3B+C=4 \\ 9A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{9} \\ B=\frac{1}{9} \\ C=\frac{13}{3} \end{cases}$$

$$\frac{4z-1}{z(z+3)^2}=-\frac{1}{9}\frac{1}{z}+\frac{1}{9}\frac{1}{z+3}+\frac{13}{3}\frac{1}{(z+3)^2}$$

Тогда, получаем, в круге $|z|<3$

$$\frac{4z-1}{z(z+3)^2}=-\frac{1}{9}\frac{1}{z}+\frac{1}{9}\frac{1}{z+3}+\frac{13}{3}\frac{1}{(z+3)^2}=-\frac{1}{9}\frac{1}{z+3-3}+\frac{1}{9}\frac{1}{z+3}+\frac{13}{3}\frac{1}{(z+3)^2}=$$

$$=\frac{1}{27}\frac{1}{1-\frac{z+3}{3}}+\frac{1}{9}\frac{1}{z+3}+\frac{13}{3}\frac{1}{(z+3)^2}=\frac{1}{27}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+3}{3}\right)^k+\frac{1}{9}\frac{1}{z+3}+\frac{13}{3}\frac{1}{(z+3)^2}$$

Тогда, получаем, в области $|z|\geq 3$

$$\frac{4z-1}{z(z+3)^2}=-\frac{1}{9}\frac{1}{z}+\frac{1}{9}\frac{1}{z+3}+\frac{13}{3}\frac{1}{(z+3)^2}=-\frac{1}{9}\frac{1}{z+3-3}+\frac{1}{9}\frac{1}{z+3}+\frac{13}{3}\frac{1}{(z+3)^2}=$$

$$=-\frac{1}{9}\frac{1}{(z+3)}\frac{1}{1-\frac{3}{z+3}}+\frac{1}{9}\frac{1}{z+3}+\frac{13}{3}\frac{1}{(z+3)^2}=-\frac{1}{9}\frac{1}{(z+3)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z+3}\right)^k+\frac{1}{9}\frac{1}{z+3}+\frac{13}{3}\frac{1}{(z+3)^2}=$$

$$=-\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{(z+3)^{k+1}}+\frac{1}{9}\frac{1}{z+3}+\frac{13}{3}\frac{1}{(z+3)^2}$$

Задание 7

Вычислить интеграл при помощи вычетов

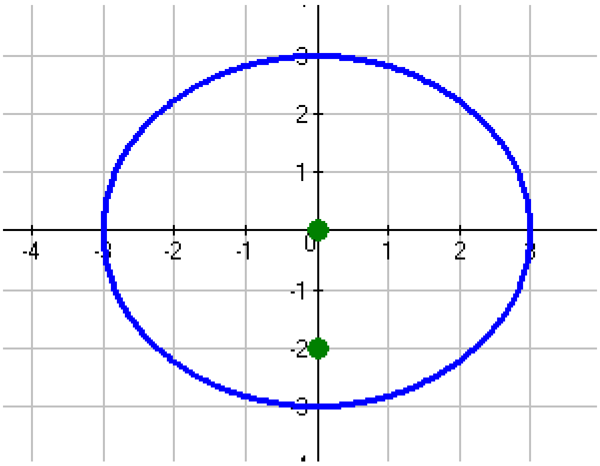
А) $\int\limits_{|z|=3} \frac{sh\pi z}{z^2(z+2i)}dz$ Б) $\int\limits_{|z-3i|=2} \frac{z}{z^2+9}e^{-\frac{3\pi}{z}}dz$

Решение

А)

Особые точки подынтегральной функции $z=0, z=-2i$.

Изобразим контур интегрирования и особые точки

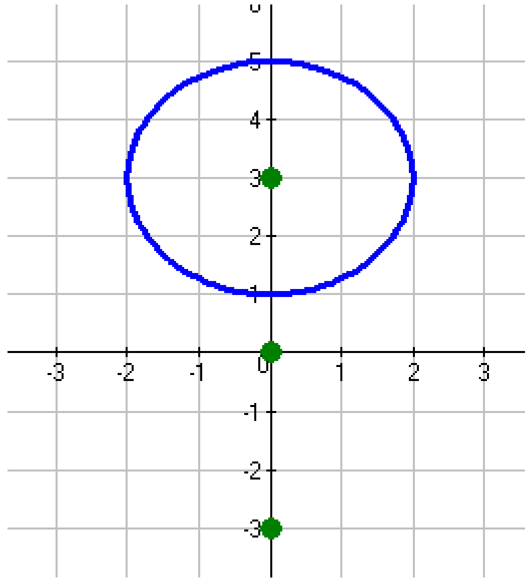


Так как все особые точки лежат внутри контура интегрирования, то $\int\limits_{|z|=3} \frac{sh\pi z}{z^2(z+2i)}dz = 0$

Б)

Особые точки подынтегральной функции $z=\pm 3i, z=0$.

Изобразим контур интегрирования и особые точки



Только точка $x=3i$ попала в контур интегрирования, значит,

$$\int\limits_{|z-3i|=2} \frac{z}{z^2+9} e^{-\frac{3\pi}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=3i} \frac{z}{z^2+9} e^{-\frac{3\pi}{z}} = 2\pi i \lim_{z\to 3i} \frac{z}{z^2+9} e^{-\frac{3\pi}{z}} (z-3i) = 2\pi i \lim_{z\to 3i} \frac{z}{(z-3i)(z+3i)} e^{-\frac{3\pi}{z}} (z-3i) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 3i} \frac{z}{z+3i} e^{-\frac{3\pi}{z}} = 2\pi i \frac{3i}{3i+3i} e^{-\frac{3\pi}{3i}} = \frac{2\pi i}{2} e^{-\frac{i\pi}{i^2}} = \pi i e^{i\pi} = \pi i(\cos\pi + i\sin\pi) = -\pi i$$