МЭСИ. Высшая математика

Контрольная работа № 3

114. Найти неопределенные интегралы. Результат проверить дифференцированием:

$$а)\ \int e^{-x^2} x dx; \qquad б)\ \int \frac{dx}{\sqrt{5-7x+3x^2}}; \qquad в)\ \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Решение:

$$а)\ \int e^{-x^2} x dx = \left\{ \begin{matrix} замена \quad t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2}\int e^t dt = \left\{ \begin{matrix} по \quad таблицам \\ \int e^u du = e^u + C \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2}e^t + C =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Проверка. Пусть $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$, тогда $y'(x) = \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\right)' = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \cdot (-2x) + 0 =$

$$= xe^{-x^2}.$$

Ответ: $\int e^{-x^2} x dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$.

б) $$\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x+3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}}} = \left\{ \begin{matrix} \text{выделяем в знаменателе} \\ \text{полный квадрат} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 + \frac{5}{3} - \frac{49}{36}}} = \left\{ \begin{matrix} \text{замена} \quad t = x - \frac{7}{6} \\ dt = dx \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{11}{36}}} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{по} \quad \text{таблицам} \\ \int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left| t + \sqrt{t^2 + \frac{11}{36}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left| x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}} \right| + C .$$

Проверка. Пусть $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left| x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}} \right| + C$, тогда

$$y'(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left| x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}} \right| + C \right]' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}} \right)'}{x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \dfrac{2x - \frac{7}{3}}{2\sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}}}}{x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \dfrac{x - \frac{7}{6}}{\sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}}}}{x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}}} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}}+x-\frac{7}{6}}{x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3x^2-7x+5}}.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{\sqrt{5-7x+3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}}\right|+C.$

$$в)\quad \int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\left\{\begin{matrix}\text{замена}\quad t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt\end{matrix}\right\}=2\int\arcsin t\,dt=\left\{\begin{matrix}\text{по}\quad\text{частям}\\ u=\arcsin t,\ dv=dt,\\ du=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad v=t\end{matrix}\right\}=$$

$$=2\left[t\arcsin t-\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}\right]=\left\{\begin{matrix}\text{замена}\quad z=1-t^2\\ dz=-2tdt\Rightarrow -tdt=\frac{dz}{2}\end{matrix}\right\}=2t\arcsin t+2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=$$

$$=2t\arcsin t+\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=2t\arcsin t+2\sqrt{z}+C=\left\{\begin{matrix}\text{возвращаемся к исходной}\\ \text{переменной}\end{matrix}\right\}=$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}+C=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$$

Проверка. Пусть $y(x)=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$, тогда

$$y'(x)=\left[2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C\right]'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+$$

$$+2\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Ответ: $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$.

124. Найти неопределенные интегралы:

$$a)\quad \int\frac{x+1}{x^3+4x^2+5x}dx;\qquad б)\quad \int\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx;\qquad в)\quad \int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$$

Решение:

$a)$ разложим знаменатель подынтегральной дроби на множители. Для этого приравняем его к нулю и решим полученное уравнение:

$$x^3+4x^2+5x=0\quad\Leftrightarrow\quad x\left(x^2+4x+5\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad x=0.$$

Квадратный трехчлен x^2+4x+5 действительных корней не имеет, так как $D=16-20<0$.

Далее разложим подынтегральную дробь на сумму простых дробей:

$$\frac{x+1}{x^3+4x^2+5x}=\frac{x+1}{x\left(x^2+4x+5\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+5}.$$

Умножим обе части полученного соотношения на знаменатель $x(x^2+4x+5)$:

$$x+1=A(x^2+4x+5)+(Bx+C)x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{aligned} x^2: &\quad A+B=0, \\ x: &\quad 4A+C=1, \\ 1: &\quad 5A=1. \end{aligned}$$

Решаем систему

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+C=1 \\ 5A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A=-\dfrac{1}{5} \\ C=1-4A=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5} \\ A=\dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\frac{x+1}{x^3+4x^2+5x}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{5}\cdot\frac{x-1}{x^2+4x+5}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int \frac{x+1}{x^3+4x^2+5x}dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5}\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}dx .$$

Первый интеграл табличный

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$$

Для взятия второго интеграла выразим числитель через производную знаменателя $\left(x^2+4x+5\right)' = 2x+4$:

$$x-1 = \frac{1}{2}(2x+4) - 3 .$$

Таким образом,

$$\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)-3}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+5} - 3\int \frac{dx}{x^2+4x+5} .$$

В первом делаем замену $x^2+4x+5 = y$, тогда $(2x+4)dx = dy$:

$$\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln y + C = \ln\left(x^2+4x+5\right) + C\,.$$

В знаменателе второго интеграла выделяем полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left\{\begin{matrix} \textit{замена} \quad t = x+2 \\ dt = dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \textit{по таблицам} \\ \int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C \end{matrix}\right\} = arctgt + C = arctg(x+2) + C\,.$$

Значит,

$$\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+5\right) - 3arctg(x+2) + C\,.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{x+1}{x^3+4x^2+5x}dx = \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{10}\ln\left(x^2+4x+5\right) + \frac{3}{5}arctg(x+2) + C =$$

$$= \frac{1}{10}\ln\frac{|x|^2}{x^2+4x+5} + \frac{3}{5}arctg(x+2) + C = \frac{1}{10}\ln\frac{x^2}{x^2+4x+5} + \frac{3}{5}arctg(x+2) + C.$$

Ответ: $\int \frac{x+1}{x^3+4x^2+5x}dx = \frac{1}{10}\ln\frac{x^2}{x^2+4x+5} + \frac{3}{5}arctg(x+2) + C\,.$

$б)$ Так как в подынтегральную функцию входят $x^{\frac{1}{6}}$, $x^{\frac{7}{6}}$ и $x^{\frac{5}{4}}$, то делаем замену $t = x^{\frac{1}{12}}$, так как 12 – наименьшее общее кратное 4 и 6:

$$t = x^{\frac{1}{12}} \quad \Rightarrow \quad x = t^{12} \quad \Rightarrow \quad dx = 12t^{11}dt, \quad \sqrt[6]{x} = t^2, \sqrt[6]{x^7} = t^{14}, \sqrt[4]{x^5} = t^{15}.$$

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx = 12\int \frac{t^2+1}{t^{14}+t^{15}} \cdot t^{11}dt = 12\int \frac{t^2+1}{t^3+t^4}dt = 12\int \frac{t^2+1}{t^3(t+1)}dt.$$

Для взятия полученного интеграла воспользуемся методом Остроградского. Будем искать интеграл в виде:

$$\int \frac{t^2+1}{t^3(t+1)}dt = \frac{At+B}{t^2} + \int \frac{Ct+D}{t(t+1)}dt.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства:

$$\frac{t^2+1}{t^3(t+1)} = \frac{At^2-2t(At+B)}{t^4} + \frac{Ct+D}{t(t+1)}$$

$$\frac{t^2+1}{t^3(t+1)} = \frac{At-2(At+B)}{t^3} + \frac{Ct+D}{t(t+1)}.$$

Умножим обе части последнего равенства на $t^3(t+1)$:

$$t^2+1=(-At-2B)(t+1)+(Ct+D)t^2$$

$$t^2+1=-At^2-2Bt-At-2B+Ct^3+Dt^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} C=0 \\ -A+D=1 \\ -2B-A=0 \\ -2B=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B=-\dfrac{1}{2} \\ A=-2B=1 \\ D=1+A=2 \\ C=0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{t^2+1}{t^3(t+1)}dt=\frac{t-\frac{1}{2}}{t^2}+2\int\frac{dt}{t(t+1)}=\frac{2t-1}{2t^2}+2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{2t-1}{2t^2}+2\int\frac{dt}{t}-2\int\frac{d(t+1)}{t+1}=\frac{2t-1}{2t^2}+2\ln|t|-2\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{2t-1}{2t^2}+\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)^2+C.$$

Таким образом,

$$\int\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx=12\int\frac{t^2+1}{t^3(t+1)}dt=\frac{6(2t-1)}{t^2}+12\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)^2+C=$$

$$=\frac{6\left(2\sqrt[12]{x}-1\right)}{\sqrt[6]{x}}+12\ln\left(\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right)^2+C.$$

Ответ: $\int\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx=\frac{6\left(2\sqrt[12]{x}-1\right)}{\sqrt[6]{x}}+12\ln\left(\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right)^2+C$.

$в)$ воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $t=tg\frac{x}{2}$, тогда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Вычислим отдельно:

$$\frac{\sin x}{1+\sin x}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2+2t}=\frac{2t}{(1+t)^2}.$$

Подставим в исходный интеграл полученные результаты:

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int\frac{2t}{(1+t)^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=4\int\frac{tdt}{\left(1+t^2\right)(1+t)^2}.$$

Применяем метод Остроградского:

$$\int \frac{tdt}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{A}{1+t} + \int \frac{Bt^2+Ct+D}{(1+t^2)(1+t)}dt\,.$$

Дифференцируем последнее соотношение:

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{-A}{(1+t)^2} + \frac{Bt^2+Ct+D}{(1+t^2)(1+t)}\,.$$

Умножим обе части на знаменатель левой части $(1+t^2)(1+t)^2$:

$$t = -A(1+t^2) + (Bt^2+Ct+D)(1+t)$$

$$t = -A - At^2 + Bt^2 + Ct + D + Bt^3 + Ct^2 + Dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ -A+B+C=0 \\ C+D=1 \\ -A+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=0 \\ C=A \\ C+D=1 \\ D=A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ 2A=1 \\ C=A \\ D=A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ A=C=D=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Значит,

$$\int \frac{tdt}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{(1+t^2)(1+t)}dt = \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2} arctgt + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = 4\left[\frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2} arctgt\right] + C = \frac{2}{1+t} + 2arctgt + C =$$

$$= \frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + 2arctg\left(tg\frac{x}{2}\right) + C = \frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + 2\cdot\frac{x}{2} + C = \frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + x + C.$$

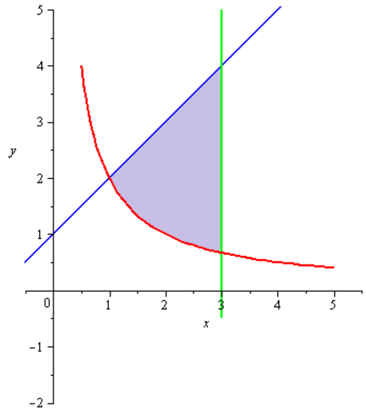
Ответ: $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + x + C.$

134. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{2}{x}, \qquad y = x+1, \qquad x = 3.$$

Решение:

Изобразим на рисунке заданную фигуру:



(Красным нарисована гипербола $y=\dfrac{2}{x}$, синим – прямая $y=x+1$, зеленым – прямая $x=3$).

По рисунку видно, что фигура сверху ограничена прямой $y=x+1$, снизу – гиперболой. Значит, искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_{x_0}^{3}\left(x+1-\frac{2}{x}\right)dx, \qquad (1)$$

где x_0 – абсцисса точки пересечения прямой $y=x+1$ и гиперболы $y=\dfrac{2}{x}$. Найдем ее, приравняв правые части уравнений:

$$x+1=\frac{2}{x} \quad\Rightarrow\quad x^2+x-2=0, \quad x\neq 0,$$

$$D=1+8=9, \quad \sqrt{D}=3 \quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{-1-3}{2}=-2<0 \quad (\textit{не удовл.}),$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1 = x_0 .$$

Подставим полученный результат в формулу (1):

$$S = \int_1^3 \left(x + 1 - \frac{2}{x} \right) dx = \int_1^3 x dx + \int_1^3 dx - 2\int_1^3 \frac{dx}{x} = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^3 + x|_1^3 - 2\ln|x||_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2}(9-1) + (3-1) - 2(\ln 3 - \ln 1) = 4 + 2 - 2\ln 3 = 6 - 2\ln 3 .$$

Ответ: $S = 6 - 2\ln 3$.

144. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 9} .$$

Решение:

Имеем несобственный интеграл первого рода (по неограниченному промежутку интегрирования). По определению:

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-9} = \lim_{b\to+\infty} \int_4^b \frac{dx}{x^2-9}.$$

Вычислим определенный интеграл

$$\int_4^b \frac{dx}{x^2-9} = \left\{ \begin{array}{l} \text{по таблицам} \\ \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C \end{array} \right\} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Bigg|_4^b =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln\left|\frac{b-3}{b+3}\right| - \ln\left|\frac{1}{7}\right|\right) = \frac{1}{6}\ln\frac{b-3}{b+3} + \frac{1}{6}\ln 7.$$

Значит,

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-9} = \lim_{b\to+\infty} \int_4^b \frac{dx}{x^2-9} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{b-3}{b+3} + \frac{1}{6}\ln 7\right) = \frac{1}{6}\ln 7 + \frac{1}{6}\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b-3}{b+3} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln 7 + \frac{1}{6}\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b+3-6}{b+3} = \frac{1}{6}\ln 7 + \frac{1}{6}\lim_{b\to+\infty}\ln\left(1 - \frac{6}{b+3}\right) = \frac{1}{6}\ln 7 + \frac{1}{6}\cdot 0 = \frac{1}{6}\ln 7.$$

Ответ: интеграл сходится, $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln 7$.