Контрольная работа по математической статистике
МЭСИ

Контрольная работа № 2 по теме

«*СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ*»

Задание 4.11

С помощью критерия Пирсона на уровне значимости $\alpha = 0{,}025$ проверить гипотезу о нормальном законе распределения на основании следующих данных:

m_i	90	150	51	9
m_i^T	112	132	46	10

Решение

Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$\chi_H^2 = \sum \frac{\left(m_i - m_i^T\right)^2}{m_i^T} = \frac{(90-112)^2}{112} + \frac{(150-132)^2}{132} + \frac{(51-46)^2}{46} + \frac{(9-10)^2}{10} = 7.42$$

По таблице χ^2 - распределения на уровне значимости 0,025 и числе степеней свободы $\nu = \ell - 3 = 4 - 3 = 1$ определим $\chi^2_{кр.} = 5{,}024$. Так как $\chi^2_{Н} = 7{,}42 < \chi^2_{кр.} = 5{,}024$, нулевая гипотеза H_0 отвергается, т.е. гипотеза о нормальном распределении совокупности не принимается

Задание 4.42

На контрольных испытаниях n = 12 ламп было определено $\bar{x}=291$ ч. Считая, что срок службы ламп распределен нормально с $\sigma=24$ ч. Проверить на уровне значимости $\alpha=0{,}15$ гипотезу $H_0:\mu=287$ ч. против альтернативной гипотезы $H_1:\mu\neq 287$ ч. В ответе записать разность между фактическим и табличным значениями выборочной характеристики.

Решение

Для проверки нулевой гипотезы **H$_0$: μ = 287** при конкурирующей гипотезе

$H_1:\mu\neq 287$ используем статистику: $t_H=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}=\frac{291-287}{24}\sqrt{12}=0.577$, так как значение σ известно.

В случае двусторонней критической области $\Phi(t_{кр})$ = 1 - α=1-0,15=0,85⇒ $t_{кр}$=1,44.

Так как $|\mathbf{t_H}| \leq \mathbf{t_{кр}}$, нулевая гипотеза **H$_0$** не отвергается.

Задание 4.57

На основании n = 9 измерений найдено, что средняя высота сальниковой камеры $\bar{x}=51$ мм., а $S=2{,}2$ мм. В предположении о нормальном распределении вычислить мощность критерия при проверке на уровне значимости $\alpha=0{,}1$ гипотезы $H_0:\mu=50$ мм. против конкурирующей гипотезы $H_1:\mu=53$ мм.

Решение

Поскольку $\mu_1>\mu_0$, то выберем правостороннюю критическую область и по таблице значений функции Лапласа

$$t_{кр}=\Phi^{-1}(1-2\alpha)=\Phi^{-1}(0.8)=1.28$$

Мощность критерия

$$1-\beta=1-P\left(\overline{x}<\mu_0+t_{кр}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{S}\sqrt{n-1}-t_{кр}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{53-50}{2.2}\sqrt{9-1}-1.28\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(2.58)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0.9901=0.9951$$

Задание 4.79

По результатам n = 13 независимых измерений найдено, что $\overline{x}=82{,}48$ мм., а $S=0{,}08$ мм. Допустив, что ошибки измерения имеют нормальное распределение проверить на уровне значимости $\alpha=0{,}02$ гипотезу $H_0:\sigma^2=0{,}01$ мм^2. против конкурирующей гипотезы $H_1:\sigma^2=0{,}005$ мм^2. В ответе записать разность между фактическим и табличным значениями выборочной характеристики.

Решение

Поскольку $\sigma_0^2>\sigma_1^2$, то выберем левостороннюю критическую область и $P(\chi^2>\chi^2_{кр})=1-\alpha$, то по таблице квантилей распределения Пирсона при уровне значимости $1-0.02=0.98$ и числе степеней свободы $v = n - 1 = 13 - 1 = 12$ найдем $\chi^2_{кр}\approx 4.178$.

Для гипотезы $H_0:\sigma^2=0{,}01$ мм^2

$$\chi^2_{набл}=\frac{nS^2}{\sigma_0^2}=\frac{13\cdot 0.08^2}{0.01}=8.32$$

$\chi^2_{набл}>\chi^2_{кр}$, значит, на уровне значимости $\alpha=0{,}02$ нулевая гипотеза отвергается.

Разность между фактическим и табличным значениями выборочной характеристики для гипотезы H_0: $\chi^2_{набл}-\chi^2_{кр}=8.32-4.178=4.142$

Задание 4.76

На основании контроля n = 15 измерений найдено, что $\bar{x}=70$ мм., а $S=3$ мм. Допустив, что ошибка изготовления есть нормальная случайная величина вычислить мощность критерия при проверке на уровне значимости $\alpha=0{,}02$ гипотезы $H_0:\sigma^2=10$ мм^2. против конкурирующей гипотезы $H_1:\sigma^2=8$ мм^2.

Решение

Поскольку $\sigma_0^2>\sigma_1^2$, то выберем левостороннюю критическую область и $P(\chi^2>\chi^2_{кр})=1-\alpha$, то по таблице квантилей распределения Пирсона при уровне значимости $1-\alpha=0.98$ и числе степеней свободы $v = n - 1 = 15 - 1 = 14$ найдем $\chi^2_{кр}\approx 5.368$.

Мощность критерия

$$1-\beta=1-P\left(\chi^2>\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{кр}\right)=1-P\left(\chi^2>\frac{10}{8}\cdot 5.368\right)=1-P(\chi^2>6.71)\approx 1-0.95=0.05$$

Задание 4.99

Из двух партий взяты выборки объемом $n_1=14$ и $n_2=17$ деталей. По результатам выборочных наблюдений найдены $\bar{x}_1=258$ мм. и $\bar{x}_2=261$ мм. Предварительным анализом установлено, что средние квадратические отклонения генеральных совокупностей равны $\sigma_1=5$ мм и $\sigma_2=9$ мм. в предположении о нормальном распределнии проверить на уровне значимости $\alpha=0{,}01$ гипотезу $H_0:\mu_1=\mu_2$ против $H_1:\mu_1<\mu_2$.

Решение

Поскольку $\mu_1 < \mu_2$, то выберем левостороннюю критическую область и по таблице значений функции Лапласа $t_{кр} = \Phi^{-1}(1-2\alpha) = \Phi^{-1}(1-2\cdot 0.01) = \Phi^{-1}(0.98) = 2.33$.

Для гипотезы $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$$t_{набл} = \frac{|\,\bar{x}_1 - \bar{x}_2\,|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{|258-261|}{\sqrt{\frac{5^2}{14} + \frac{9^2}{17}}} = 1.875 .$$

Поскольку $t_{набл} < t_{кр}$, то гипотеза $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ принимается на уровне значимости $\alpha = 0.01$.

Задание 4.91

Из двух партий взяты выборки объемом $n_1 = 8$ и $n_2 = 14$ деталей. По результатам выборочных наблюдений найдены $\bar{x}_1 = 252$ мм, $S_1 = 2$ мм и $\bar{x}_2 = 258$ мм, $S_2 = 3$ мм. Предполагая, что погрешность изготовления есть нормальная случайная величина, проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ гипотезу $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ против $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Решение

Пусть $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ и конкурирующая гипотеза $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$$t_{набл} = \frac{|\,\bar{x}_1 - \bar{x}_2\,|}{\sqrt{\left(\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{|252-258|}{\sqrt{\left(\frac{8\cdot 2^2 + 14\cdot 3^2}{8+14-2}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)}} = 3.182$$

По таблице значений t-критерия Стьюдента при $\alpha = 0.02$ и числе степеней свободы $n_1 + n_2 - 2 = 8 + 14 - 2 = 20$ найдем $t_{кр} \approx 2.528$

Поскольку $t_{набл} > t_{кр}$, то гипотеза $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ отвергается на уровне значимости $\alpha = 0.02$.

Задание 4.113

Из продукции первой смены случайным образом отобрано $n_1 = 150$ деталей, а из второй - $n_2 = 100$ деталей. Из отобранных деталей дефектными оказались $m_1 = 19$ и $m_2 = 19$. проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о равенстве вероятностей появления дефектного изделия, т.е. $H_0 : p_1 = p_2$.

Решение

Для проверки гипотезы используется статистика: $U_H^2 = \dfrac{1}{\tilde{p}(1-\tilde{p})}\sum_{i=1}^{\ell}(\tilde{p}_i - \tilde{p})^2 \cdot n_i$, где $\tilde{\mathrm{p}}_\mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{m_i}}{\mathrm{n_i}}$ - частость появления события А в i-ой выборке; **m$_\mathbf{i}$** - частота появления события **А** в **i**-ой выборке; **n$_\mathbf{i}$** - объем **i**-ой выборки; ℓ- число выборок; $\tilde{p} = \dfrac{\sum m_i}{\sum n_i}$ - частость появления события А во всех выборках;

Статистика U_H^2 при выполнении нулевой гипотезы имеет асимптотическое χ^2 - распределение с $\boldsymbol{\nu = \ell - 1}$ степенями свободы.

Тогда, получаем

$$l = 2, \sum n_i = 150 + 100 = 250, \sum m_i = 19 + 19 = 38 \Rightarrow \tilde{p} = \frac{\sum m_i}{\sum n_i} = \frac{38}{250} = 0.152$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{19}{150} = 0.127; \tilde{p}_2 = \frac{19}{100} = 0.19$$

Тогда, $U_H^2 = \dfrac{(0.127-0.152)^2 \cdot 150 + (0.19-0.152)^2 \cdot 100}{0.152(1-0.152)} = 1.848$

Вычисляем $\chi^2_{кр.} = \chi^2_{кр}(0.01; 2-1) = \chi^2_{кр}(0.01;1) = 6.635$

Так как $U_H^2 < \chi^2_{кр.}$, то нулевая гипотеза принимается.