Задание 5

1) Найти сумму, разность комплексных чисел, заданных в показательной форме. Построить операнды на комплексной плоскости

$z_1 = 3e^{-\frac{4\pi}{3}i}, z_2 = 3e^{\frac{4\pi}{3}i}$

2) Вычислить произведение и частное комплексных чисел. Построить операнды на комплексной плоскости

$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{7}i; z_2 = 3 - 4i$

Решение

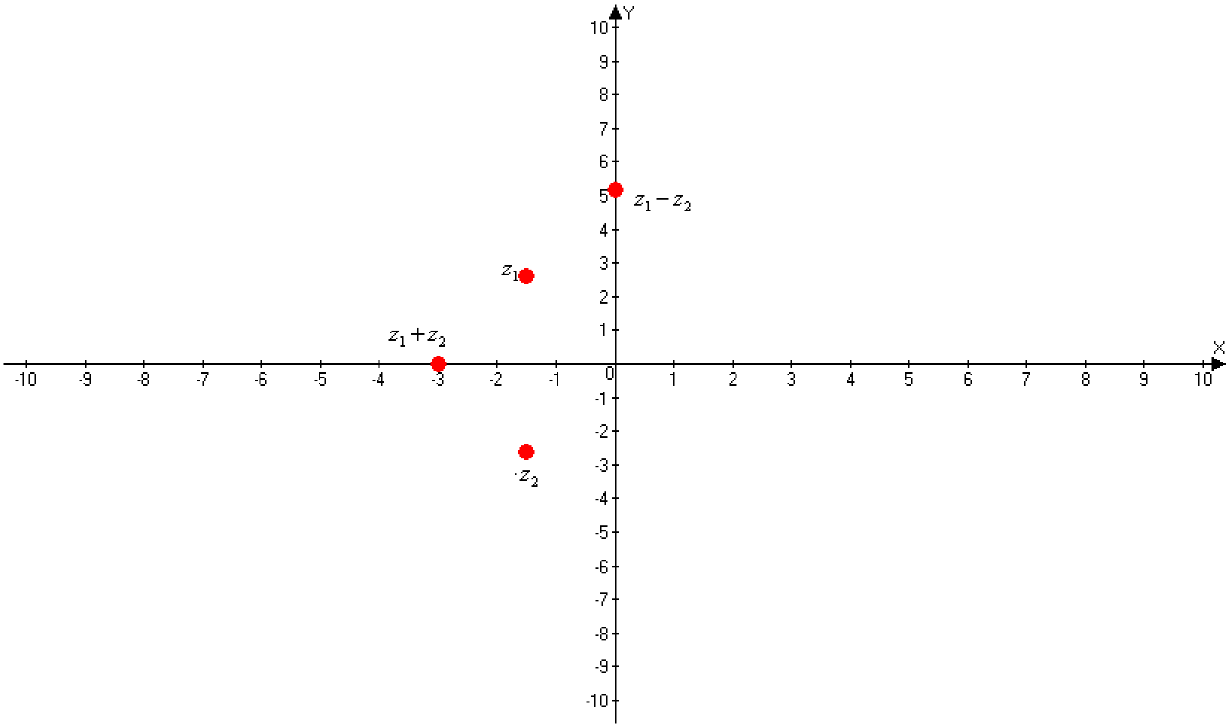
А)

$$z_1 + z_2 = 3e^{-\frac{4\pi}{3}} + 3e^{\frac{4\pi}{3}}i = 3\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right) + 3\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -3$$

$$z_1 - z_2 = 3e^{-\frac{4\pi}{3}} + 3e^{\frac{4\pi}{3}}i = 3\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right) - 3\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 3\sqrt{3}i \text{ -}$$

$z_1 = 3e^{-\frac{4\pi}{3}i}, z_2 = 3e^{\frac{4\pi}{3}i}$

Изобразим

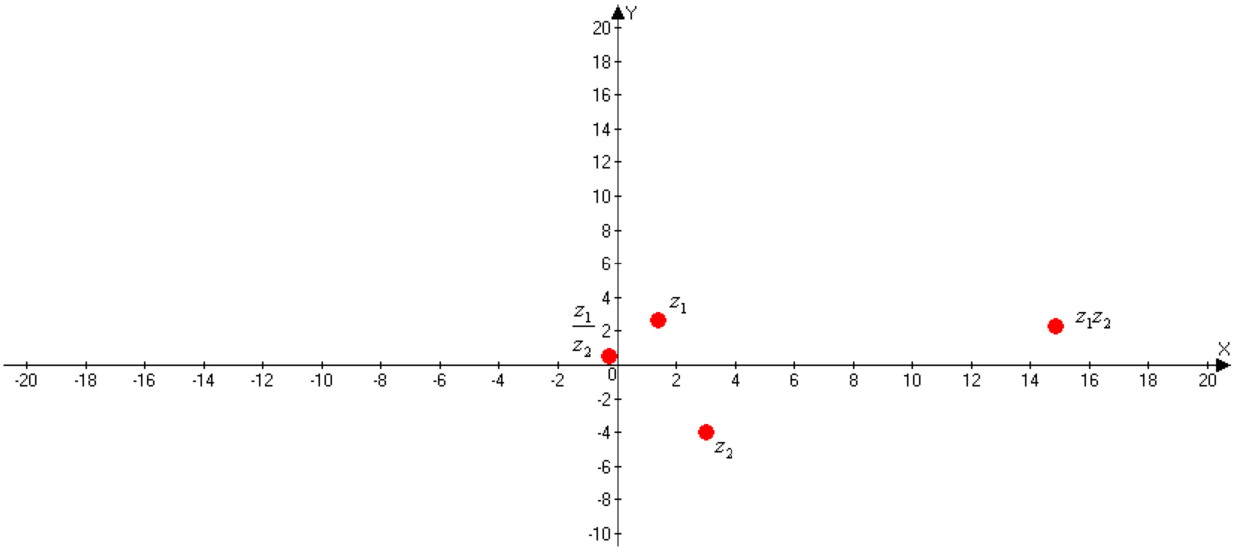


Б)

$$z_1 z_2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{7}i\right)(3 - 4i) = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i + 3\sqrt{7}i + 4\sqrt{7} = \left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{7}\right) + i\left(3\sqrt{7} - 4\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{7}i}{3 - 4i} = \frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{7}i\right)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i + 3\sqrt{7}i - 4\sqrt{7}}{3^2 + 4^2} = \frac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{7}}{25} + i\frac{3\sqrt{7} + 4\sqrt{2}}{25}$$

Изобразим



Задание 6

Вычислить производную $f(z) = z^2 - 2iz + 1$ в точке $z = 1 + i$

Решение

Покажем, что функция аналитична

Пусть $z = x + yi$, тогда получаем

$$f(z) = z^2 - 2iz + 1$$

$$f(z) = (x+yi)^2 - 2i(x+yi) + 1 = (x^2 + 2xyi - y^2) - 2xi + 2y + 1 =$$

$$= (x^2 - y^2 + 2y) + i(2xy - 2x)$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2y; v(x,y) = 2xy - 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = --2y + 2; \frac{\partial v}{\partial x} = 2y - 2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Значит, производная существует и равна

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + (2y-2)i$$

$$f'(1+i) = 2*1 + (2*1-2)i = 2$$

Задание 7

Вычислить интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_L \frac{\cos z}{z(z^2-4)}dz$, где

А) $L: |z - i| = 2$

Б) $L: |z - 3| = \frac{1}{2}$

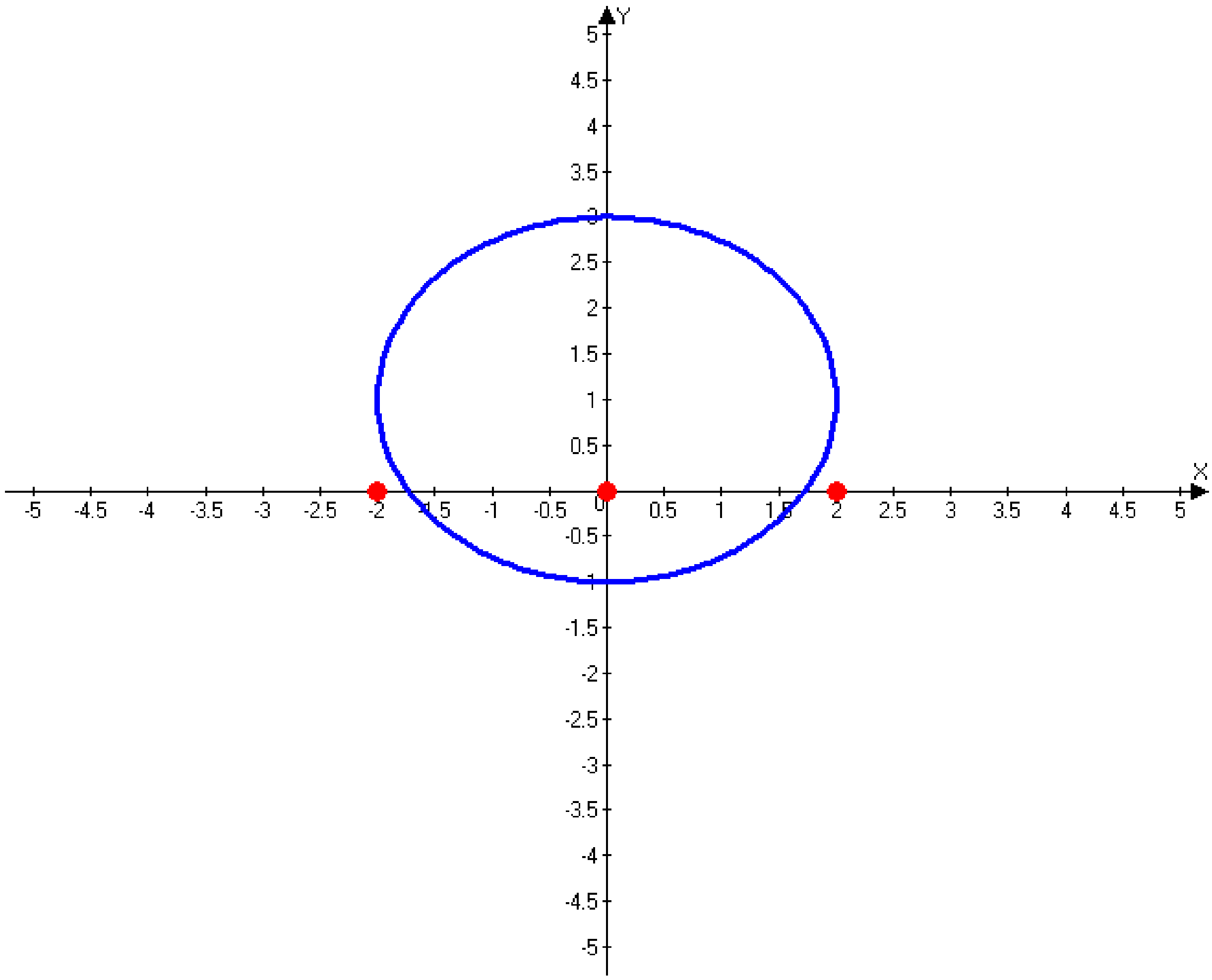
Решение

$$\oint_L \frac{\cos z}{z\left(z^2-4\right)}dx=\oint_L \frac{\cos z}{z(z-2)(z+2)}dx$$

Значит, особые точки $z=0, z=2, z=-2$

А)

Нарисуем область интегрирования и особые точки



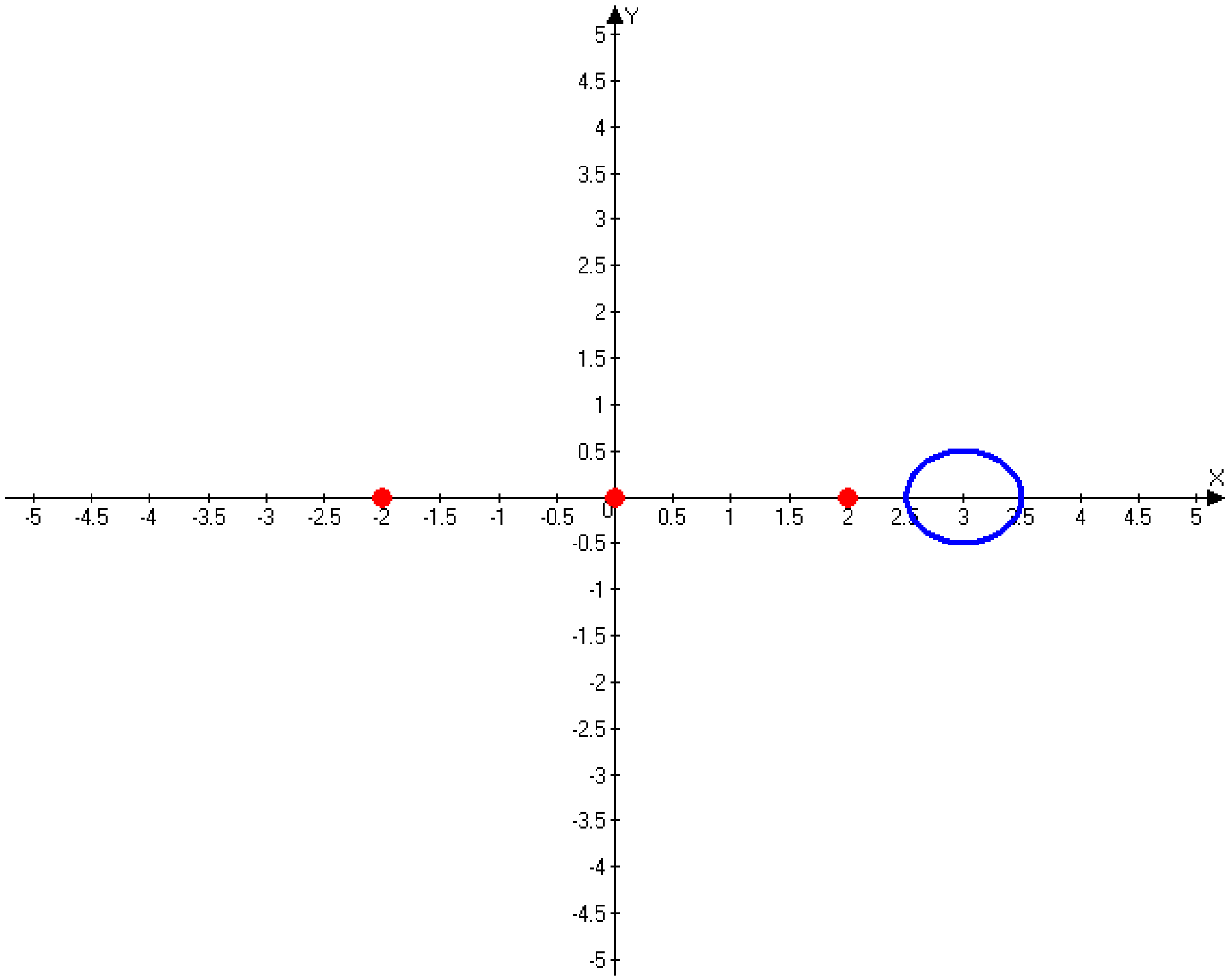
Только точка $z=0$ лежит в данной области, тогда

$$\oint_L \frac{\cos z}{z\left(z^2-4\right)}dz=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z\left(z^2-4\right)}=2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{z\left(z^2-4\right)}(z-0)=2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{z^2-4}=$$

$$=2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{\cos 0}{0^2-4}=-\frac{\pi i}{2}$$

Б)

Нарисуем область интегрирования и особые точки



Ни одна из точек не попала, значит, $\oint_L \frac{\cos z}{z\left(z^2-4\right)}dz = 0$