Контрольная работа

Теория функций комплексного переменного

Задача 1. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$$

Решение

Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}$$

имеем

$$c_{-n}=e^{in};\ c_{-n-1}=e^{i(n+1)},$$

тогда

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|e^{i(n+1)}\right|}{\left|e^{in}\right|}=1,$$

т.е. ряд сходится в области $|z+1|>1$.

Для степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}.$$

имеем

$$c_n=e^{-in-\frac{1}{2}};c_{n+1}=e^{-i(n+1)-\frac{1}{2}},$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|e^{-in-\frac{1}{2}}\right|}{\left|e^{-i(n+1)-\frac{1}{2}}\right|}=1.$$

Т.е. ряд сходится в области $|z+1|<1$. Таким образом, ряд является расходящимся во всей комплексной плоскости.

Задача 2. Найти первые три члена разложения функции $e^{\cos z}$ по степеням z.

Решение.

Воспользуемся разложением функции в ряд Маклорена $(z_0=0)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}z^n,\ \ f(z)=e^{\cos z},\ f(0)=e;$$

$$f'(z)=-e^{\cos z}\cdot\sin z;\ f'(0)=0;$$

$$f''(z)=e^{\cos z}(\sin^2 z-\cos z);\ f''(0)=-e;$$

$$f'''(z)=e^{\cos z}(-\sin^3 z+2\sin z\cdot\cos z+\sin z);\ f'''(0)=0;$$

$$(f''')'=e^{\cos z}(\sin^4 z-6\sin^2 z\cdot\cos z-4\sin^2 z+3\cos^2 z+\cos z);$$

$$(f''')'(0)=4e;$$

$$f(z)=e-ez^2+\frac{e}{3!}z^4+...=e(1-\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{3!}+...).$$

Задача 3. Найти все разложения функций в ряд Лорана по степеням $z-z_0$

а) $\dfrac{2z}{z^2-4};z_0=3-2i;$

б) $z\cdot\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2};z_0=1$

Решение

а) Функция

$$f(z)=\frac{2z}{(z-2)(z+2)}$$

имеет две особые точки $z_0=\pm2$ - полюсы 1-го порядка.

Представим данную функцию в виде суммы простых дробей:

$$f(z)=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+2}=\frac{Az+2A+Bz-2B}{(z+2)(z-2)},$$

$$2z=(A+B)z+2(A-B),$$

$$A=B=1,$$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}.$$

Представим дроби в виде

$$\frac{1}{z-z_0+z_0\pm 2}=\frac{1}{(z_0\pm 2)+(z-z_0)}$$

и воспользуемся известным разложением

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots \qquad |z|<1,$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(1-2i)+(z-(3-2i))}=\frac{1}{1-2i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-(3-2i)}{1-2i}}=$$

$$=\frac{1}{1-2i}(1-\frac{z-(3-2i)}{1-2i}+\ldots+(-1)^n\left(\frac{z-(3-2i)}{1-2i}\right)^n+\ldots), \qquad |z-(3-2i)|<\sqrt{5};$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{5-2i}\left(1-\frac{z-(3-2i)}{5-2i}+\ldots+(-1)^n\left(\frac{z-(3-2i)}{5-2i}\right)^n+\ldots\right),$$

$$|z-(3-2i)|<\sqrt{29};$$

Тогда в круге $|z-(3-2i)|<\sqrt{5}$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{1-2i}-\frac{z-(3-2i)}{(1-2i)^2}+\ldots(-1)^n\frac{(z-(3-2i))^n}{(1-2i)^{n+1}}+\ldots$$

$$+\frac{1}{5-2i}-\frac{z-(3-2i)}{(5-2i)^2}+\ldots(-1)^n\frac{(z-(3-2i))^n}{(5-2i)^{n+1}}+\ldots$$

В кольце $\sqrt{5}<|z-(3-2i)|<\sqrt{29}$ ряд для функции $1/(z+2)$ сходящийся, а вторую дробь представим в виде

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-(3-2i)}\cdot\frac{1}{(1+\dfrac{1-2i}{z-(3-2i)})}=\frac{1}{z-(3-2i)}-\frac{1-2i}{(z-(3-2i))^2}+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{(1-2i)^n}{(z-(3-2i))^{n+1}}+\ldots$$

Тогда

$$f(z)=\frac{1}{(5-2i)}-\frac{z-(3-2i)}{(5-2i)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{(z-(3-2i))^n}{(5-2i)^{n+1}}+\ldots+$$

$$\frac{1}{z-(3-2i)}-\frac{1-2i}{(z-(3-2i))^2}+\ldots+(-1)^n\frac{(1-2i)^n}{(z-(3-2i))^{n+1}}+\ldots$$

Вне круга $|z-(3-2i)|>\sqrt{29}$ имеем

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z-(3-2i)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{5-2i}{z-(3-2i)}}=\frac{1}{z-(3-2i)}-\frac{5-2i}{(z-(3-2i))^2}+$$

$$+\ldots+(-1)^n\frac{(5-2i)^n}{(z-(3-2i))^{n+1}}+\ldots$$

$$f(z)=\frac{1}{z-(3-2i)}-\frac{1-2i}{(z-(3-2i))^2}+\ldots+(-1)^n\frac{(1-2i)^n}{(z-(3-2i))^{n+1}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{z-(3-2i)}-\frac{5-2i}{(z-(3-2i))^2}+\ldots+(-1)^n\frac{(5-2i)^n}{(z-(3-2i))^{n+1}}+\ldots$$

б) $f(z)=z\cdot\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2};z_0=1.$

Решение

Представим

$$f(z)=(1+(z-1))\cdot\sin(1-\frac{1}{(z-1)^2})$$

Воспользовавшись известными разложениями

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

а также преобразованием синуса разности в произведение, получим

$$f(z) = (1 + (z-1)) \cdot \left[\sin 1 - \frac{\sin 1}{2!(z-1)^4} + \frac{\sin 1}{4!(z-1)^8} - \ldots - \frac{\cos 1}{(z-1)^2} + \frac{\cos 1}{(z-1)^6} - \ldots \right] =$$

$$= \sin 1 + \sin 1 (z-1) - \frac{\cos 1}{z-1} - \frac{\cos 1}{(z-1)^2} - \frac{\sin 1}{2!(z-1)^3} - \frac{\sin 1}{2!(z-1)^4} +$$

$$+ \frac{\cos 1}{3!(z-1)^5} + \frac{\cos 1}{3!(z-1)^6} + \frac{\sin 1}{4!(z-1)^7} + \ldots$$

Задача 4. Для функции

$$\frac{1}{\sin z}$$

найти изолированные особые точки и определить их тип.

Решение

Очевидно

$$\lim_{z \to k\pi} \frac{1}{\sin z} = \infty, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Так же очевидно

$$\lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)^n}{\sin z} = \begin{cases} 1, \; n = 1 \\ 0, \; n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Таким образом, точки $z_k = k\pi, k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ являются простыми полюсами рассматриваемой функции.

Задача 5. Найти вычеты для данных функций в указанных особых точках а) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}, z=0$

Решение

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2\sin z\cdot\cos z}=\frac{1}{2},$$

т.е. точка $z=0$ - устранимая особая точка. Как известно, вычет в устранимой особой точке равен нулю

$\operatorname{res} f(0)=0.$

б) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)}e^{\frac{z}{z-2}}, z=2$.

Решение

Преобразуем функцию к виду

$$f(z)=\frac{1}{z-2}e^{\frac{z}{z-2}}=\frac{1}{z-2}e\cdot e^{\frac{2}{z-2}}.$$

и воспользуемся известным разложением

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots$$

Тогда

$$f(z)=\frac{e}{z-2}+\frac{2e}{(z-2)^2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{4}{(z-2)^3}+\dots$$

$\operatorname{res} f(2)=c_{-1}=e$

с) $f(z)=\dfrac{z}{\pi z^2-2}\cdot\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2},\ z=\infty$

Решение

По определению

$\operatorname{res} f(\infty)=-c_1,$

где c_1 - коэффициент при $1/z$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности

$z=\infty$, взятый с обратным знаком. Преобразуя функцию и использовав известные разложения, получим

$$f(z)=\left(\frac{1}{\pi z}+\frac{2}{\pi z(\pi z^2-2)}\right)\cdot\left(\sin 1\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^4}+\ldots\right)-\cos 1\left(\frac{1}{(z-2)^2}-\ldots\right)\right)$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{res} f(\infty)=-c_1=-\frac{\sin 1}{\pi}.$$

Задача 6. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=8}\frac{1}{\sin z}dz$

Решение

Функция $f(z)=1/\sin z$ аналитическая во всех точках плоскости кроме точек $z_k=\pi k; k=0;\pm1;\pm2;\ldots$, которые являются простыми полюсами данной функции. В круг $|z|=8$ попадают только точки

$z_1=0; z_2=-\pi; z_3=\pi; z_4=-2\pi; z_5=2\pi; z_6=-3\pi; z_7=3\pi$.

Пользуясь формулой

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{\varphi(a)}{g'(a)}, \text{ если } f(z)=\frac{\varphi(z)}{g(z)},$$

вычислим вычеты в особых точках:

$$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{\cos 0}=1,$$

$$\operatorname{res} f(\pm\pi)=-1,$$

$$\operatorname{res} f(\pm 2\pi)=1,$$

$$\operatorname{res} f(\pm 3\pi)=-1.$$

Тогда на основании теоремы Коши о вычетах получим

$$\int\limits_{|z|=8}\frac{dz}{\sin z}=2\pi i\cdot\sum_{k=0}^{7}\operatorname{res} f(z_k)=2\pi i(1-1+1-1+1-1-1)=-2\pi i$$

б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$

Решение

Функция

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$$

аналитическая в верхней полуплоскости за исключением полюса второго порядка $z=i$.

$$\operatorname{res} f(i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-i)^2z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right\}=\lim_{z\to i}\frac{2z^2i-2z}{(z+i)^4}=-\frac{i}{4}.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(i),$$

получим

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{2\pi i}{2}\cdot\frac{i}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

с) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1}{(3+\cos t)^2}dt$

Решение

Положим $e^{it}=z$.При изменении t от 0 до 2π точка z опишет в положительном направленни окружность $l:|z|=1$. Тогда

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

$$dz=ie^{it}dt=izdt,$$

$$I=\int\limits_{l}\frac{dz}{iz\left(\frac{z^2+1}{2z}+3\right)^2}=\frac{4}{i}\int\limits_{l}\frac{zdz}{(z^2+6z+1)^2}.$$

Функция

$$f(z)=\frac{z}{(z^2+6z+1)^2}$$

имеет два полюса второго порядка $z_{1,2}=-3\pm 2\sqrt{2}$. Но только $z_1=-3+2\sqrt{2}$ лежит внутри l.

$$\operatorname{res} f(z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-z_1)^2\cdot z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right\}=\lim_{z\to z_1}\frac{-z^2}{(z-z_2)^4}=$$

$$=\lim_{z\to -3+2\sqrt{2}}\frac{-z^2}{(z+3+2\sqrt{2})^2}=\frac{3}{64\sqrt{2}}.$$

$$I=\frac{4}{i}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname{res} f(z_1)=\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$