Контрольная работа на вычисление интегралов

Сборник задач по курсу математического анализа. Берман Г.Н.

Задача 1852. $\int x^2 a^x dx$

Решение. Дважды интегрируем по частям:

$$\int x^2 a^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = a^x dx & v = \frac{1}{\ln a} a^x \end{vmatrix} = \frac{1}{\ln a} a^x x^2 - \frac{2}{\ln a} \int x a^x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = a^x dx & v = \frac{1}{\ln a} a^x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\ln a} a^x x^2 - \frac{2}{\ln a}\left(\frac{1}{\ln a} a^x x - \frac{1}{\ln a} \int a^x dx \right) = \frac{1}{\ln a} a^x x^2 - \frac{2}{\ln a}\left(\frac{1}{\ln a} a^x x - \frac{1}{\ln^2 a} a^x \right) + C =$$

$$= \frac{1}{\ln a} a^x x^2 - \frac{2}{\ln^2 a} a^x x + \frac{2}{\ln^3 a} a^x + C = a^x \left(\frac{1}{\ln a} x^2 - \frac{2}{\ln^2 a} x + \frac{2}{\ln^3 a} \right) + C.$$

Задача 1859. $\int (\operatorname{arctg} x)^2 x dx$

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int (\operatorname{arctg} x)^2 x dx = \begin{vmatrix} u = (\operatorname{arctg} x)^2 & du = \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\ dv = xdx & v = \frac{1}{2} x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} x^2 (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \frac{(x^2+1-1) \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \operatorname{arctg} x dx + \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx =$$

Для вычисления первого интеграла еще раз применяем интегрирование по частям, во втором вносим под знак дифференциала $\operatorname{arctg} x$. Получаем:

$$= \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = \frac{1}{2} x^2 (\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 (\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

Задача 1880. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$

Решение. Делаем замену переменной: $t = \sqrt[3]{x},\ x = t^3,\ dx = 3t^2 dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)} = \int \frac{3t^2 dt}{t(t-1)} = 3\int \frac{tdt}{(t-1)} = 3\int \frac{(t-1+1)dt}{(t-1)} = 3\int dt + 3\int \frac{dt}{(t-1)} = 3t + 3\ln|t-1| + C =$$
$$= 3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x}-1| + C.$$

Задача 1885. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$

Решение. Делаем замену переменной: $t = \ln x,\ dt = \frac{dx}{x}$. Получаем:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = \int \frac{\sqrt{1+t}}{t}dt =$$

Делаем еще замену переменной: $z = \sqrt{1+t},\ z^2 = 1+t,\ t = z^2-1,\ dt = 2zdz$.

$$= \int \frac{z}{z^2-1}2zdz = 2\int \frac{z^2}{z^2-1}dz = 2\int \frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz = 2\int 1dz + 2\int \frac{1}{z^2-1}dz = 2z + 2\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C =$$

$$= 2z + \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = 2\sqrt{1+\ln x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{1+\ln x} + \ln\left|\frac{\left(\sqrt{1+\ln x}-1\right)\left(\sqrt{1+\ln x}-1\right)}{\left(\sqrt{1+\ln x}+1\right)\left(\sqrt{1+\ln x}-1\right)}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{1+\ln x} + \ln\left|\frac{\left(1+\ln x - 2\sqrt{1+\ln x}+1\right)}{(1+\ln x-1)}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{1+\ln x} + \ln\left|\frac{\left(\sqrt{1+\ln x}-1\right)^2}{(\ln x)}\right| + C = 2\sqrt{1+\ln x} + 2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right| - \ln\left|\ln x\right| + C.$$

Задача 2016. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

Решение. Выделим целую и дробную часть данной неправильной дроби:

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \cline{2-2} \underline{x^5-4x^3} & x^2+x+4 \\ x^4+4x^3 & \\ \underline{x^4-4x^2} & \\ 4x^3+4x^2 & \\ \underline{4x^3-16x} & \\ 4x^2+16x-8 & \end{array}$$

Получили

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$$

Разложим получившуюся дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2},$$

$$4x^2+16x=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Положим $x=0$, получаем $-8=-4A,\ A=2$

Положим $x=2$, получаем $16+32-8=8B,\ B=5$

Положим $x=-2$, получаем $16-32-8=8C,\ C=-3$.

Таким образом, $\dfrac{4x^2+16x}{x^3-4x}=\dfrac{4x^2+16x}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{-3}{x+2}$.

Возвращаемся к интегралу:

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int(x^2+x+4)\,dx+\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{-3}{x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+\ln|x^2|+\ln|(x-2)^5|-\ln|(x+2)^3|+C=$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$$

Задача 2035. $\displaystyle\int\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}dx$

Решение. Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}$$

$$3x^2+1=A_1(x-1)^2(x+1)^3+A_2(x-1)(x+1)^3+A_3(x+1)^3+$$

$$+B_1(x-1)^3(x+1)^2+B_2(x-1)^3(x+1)+B_3(x-1)^3$$

Положим $x=1$, получим: $4=A_3(1+1)^3$, $A_3=1/2$

Положим $x=-1$, получим: $4=B_3(-1-1)^3$, $B_3=-1/2$.

Итак,

$$3x^2+1=A_1(x-1)^2(x+1)^3+A_2(x-1)(x+1)^3+\frac{1}{2}(x+1)^3+$$

$$+B_1(x-1)^3(x+1)^2+B_2(x-1)^3(x+1)-\frac{1}{2}(x-1)^3$$

Или, после упрощения,

$0=A_1(x-1)^2(x+1)^3+A_2(x-1)(x+1)^3+B_1(x-1)^3(x+1)^2+B_2(x-1)^3(x+1)$, поэтому все остальные коэффициенты равны нулю.
Получили:

$$\frac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^3}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^3}.$$

Возвращаемся к интегралу:

$$\int\frac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^3}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2}+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)+C=-\frac{1}{4}\left(\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{2x-(-2x)}{\left(x^2-1\right)^2}\right)+C=-\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}+C.$$

Задача 2044. $\int\frac{\left(3x^2+x+3\right)dx}{(x-1)^3\left(x^2+1\right)}$

Решение. Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{\left(3x^2+x+3\right)}{(x-1)^3\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1},$$

$$3x^2+x+3=A(x-1)^2\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+C\left(x^2+1\right)+(Dx+E)(x-1)^3.$$

$$3x^2+x+3=A\left(x^4-2x^3+2x^2-2x+1\right)+B\left(x^3-x^2+x-1\right)+C\left(x^2+1\right)+D\left(x^4-3x^3+3x^2-x\right)+$$
$$+E\left(x^3-3x^2+3x-1\right)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. Получаем:

$$\begin{cases}A+D=0,\\-2A+B-3D+E=0,\\2A-B+3D-3E+C=3,\\-2A+B-D+3E=1,\\A-B+C-E=3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=-D,\\2D+B-3D+E=0,\\-2D-B+3D-3E+C=3,\\2D+B-D+3E=1,\\-D-B+C-E=3.\end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-D, \\ B-D+E=0, \\ -B+D-3E+C=3, \\ B+D+3E=1, \\ -D-B+C-E=3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-D, \\ B-D+E=0, \\ -2E+C=3, \\ B+D+3E=1, \\ 2E+C=4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-D, \\ B-D+E=0, \\ -2E+C=3, \\ 2B+4E=1, \\ 2C=7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-D, \\ B-D+E=0, \\ E=1/4, \\ 2B+4E=1, \\ C=7/2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-D, \\ B-D+1/4=0, \\ E=1/4, \\ 2B+1=1, \\ C=7/2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-1/4, \\ D=1/4, \\ E=1/4, \\ B=0, \\ C=7/2. \end{cases}$$

Получили:

$$\frac{\left(3x^2+x+3\right)}{(x-1)^3\left(x^2+1\right)}=-\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{7}{2}\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+1}$$

Возвращаемся к интегралу:

$$\int \frac{\left(3x^2+x+3\right)}{\left(x-1\right)^3\left(x^2+1\right)}dx = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^3}+\frac{1}{4}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{7}{4}\frac{1}{\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{8}\int\frac{2x+2}{x^2+1}dx = -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{7}{4}\frac{1}{\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{8}\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{7}{4}\frac{1}{\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{8}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln|x-1| - \frac{7}{\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg} x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{7}{\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}\right|+\operatorname{arctg} x\right) + C.$$

Задача 2049. $\int \frac{dx}{x\left(4+x^2\right)^2\left(1+x^2\right)}$

Решение. Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{x\left(4+x^2\right)^2\left(1+x^2\right)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{4+x^2}+\frac{Dx+E}{\left(4+x^2\right)^2}+\frac{Mx+N}{1+x^2},$$

$$1 = A\left(4+x^2\right)^2\left(1+x^2\right)+\left(Bx+C\right)x\left(4+x^2\right)\left(1+x^2\right)+\left(Dx+E\right)x\left(1+x^2\right)+\left(Mx+N\right)x\left(4+x^2\right)^2,$$

$$1 = A\left(x^6+9x^4+24x^2+16\right)+B\left(x^6+5x^4+4x^2\right)+C\left(x^5+5x^3+4x\right)+D\left(x^2+x^4\right)+$$

$$+E\left(x+x^3\right)+M\left(x^6+8x^4+16x^2\right)+N\left(x^5+8x^3+16x\right).$$

Полагаем $x=0$, находим $A=1/16$. Получили

$$1-\frac{1}{16}\left(x^6+9x^4+24x^2+16\right) = B\left(x^6+5x^4+4x^2\right)+C\left(x^5+5x^3+4x\right)+D\left(x^2+x^4\right)+$$

$$+E\left(x+x^3\right)+M\left(x^6+8x^4+16x^2\right)+N\left(x^5+8x^3+16x\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. Получаем:

$$\begin{cases} B+M=-\dfrac{1}{16}, \\ C+N=0, \\ 5B+D+8M=-\dfrac{9}{16}, \\ 5C+E+8N=0, \\ 4B+D+16M=-\dfrac{3}{2}, \\ 4C+E+16N=0. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} B=-\frac{1}{16}-M, \\ C=-N, \\ -\frac{5}{16}-5M+D+8M=-\frac{9}{16}, \\ -5N+E+8N=0, \\ -\frac{1}{4}-4M+D+16M=-\frac{3}{2}, \\ -4N+E+16N=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=-\frac{1}{16}-M, \\ C=-N, \\ D+3M=-\frac{1}{4}, \\ E+3N=0, \\ D+12M=-\frac{5}{4}, \\ E+12N=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=-\frac{1}{16}-M, \\ C=0, \\ D+3M=-\frac{1}{4}, \\ E=0, \\ 9M=-1, \\ N=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=\frac{7}{144}, \\ C=0, \\ D=\frac{1}{12}, \\ E=0, \\ M=-\frac{1}{9}, \\ N=0. \end{cases}$$

Получили:

$$\frac{1}{x\left(4+x^2\right)^2\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{16}\frac{1}{x}+\frac{1}{144}\frac{7x}{4+x^2}+\frac{1}{12}\frac{x}{\left(4+x^2\right)^2}-\frac{1}{9}\frac{x}{1+x^2}.$$

Переходим к интегралу:

$$\int \frac{dx}{x\left(4+x^2\right)^2\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{144}\int \frac{xdx}{4+x^2} + \frac{1}{12}\int \frac{xdx}{\left(4+x^2\right)^2} - \frac{1}{9}\int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{16}\ln|x| + \frac{7}{288}\int \frac{d\left(4+x^2\right)}{4+x^2} + \frac{1}{24}\int \frac{d\left(4+x^2\right)}{\left(4+x^2\right)^2} - \frac{1}{18}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{16}\ln|x| + \frac{7}{288}\ln\left(4+x^2\right) - \frac{1}{24\left(4+x^2\right)} - \frac{1}{18}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Задача 2070. $\int \frac{xdx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}}$

Решение. Делаем замену переменной: $t=(x+1)^{1/6}$, $t^6=x+1,\ x=t^6-1,\ dx=6t^5dt$. Получаем:

$$\int \frac{xdx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}} = \int \frac{\left(t^6-1\right)6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{\left(t^6-1\right)t^3dt}{t+1} = 6\int \frac{\left(\left(t^3\right)^2-1\right)t^3dt}{t+1} =$$

$$= 6\int \frac{\left(t^3-1\right)\left(t^3+1\right)t^3dt}{t+1} = 6\int \frac{\left(t^3-1\right)(t+1)\left(t^2-t+1\right)t^3dt}{t+1} = 6\int \left(t^3-1\right)\left(t^2-t+1\right)t^3dt =$$

$$= 6\int \left(t^8-t^7+t^6-t^5+t^4-t^3\right)dt = 6\left(\frac{1}{9}t^9-\frac{1}{8}t^8+\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{6}t^6+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{4}t^4\right)+C =$$

$$= 6\left(\frac{1}{9}(x+1)^{3/2}-\frac{1}{8}(x+1)^{4/3}+\frac{1}{7}(x+1)^{7/6}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{5/6}-\frac{1}{4}(x+1)^{2/3}\right)+C.$$

Задача 2108. $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin x\cdot\cos 3x}$

Решение.

$$\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin x\cdot\cos 3x} = \int \frac{\cos^2 xdx}{\sin x\cdot\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)} = \int \frac{\cos xdx}{\sin x\cdot\left(4\cos^2 x-3\right)} = \int \frac{\cos xdx}{\sin x\cdot\left(4\left(1-\sin^2 x\right)-3\right)} =$$

$$= \int \frac{\cos xdx}{\sin x\cdot\left(4-4\sin^2 x-3\right)} = \int \frac{\cos xdx}{\sin x\cdot\left(1-4\sin^2 x\right)} =$$

Делаем замену $t=\sin x,\ dt=\cos xdx$

$$= \int \frac{dt}{t\cdot\left(1-4t^2\right)} = \int \frac{dt}{t(1-2t)(1+2t)} =$$

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{t(1-2t)(1+2t)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{1-2t}+\frac{C}{1+2t}$$

$1 = A(1-2t)(1+2t) + Bt(1+2t) + Ct(1-2t)$.

Положим $t=0$, получим: $1 = A$

Положим $t=1/2$, получим: $1 = B$

Положим $t=-1/2$, получим: $1=-C,\ C=-1$.

Получаем

$$\frac{1}{t(1-2t)(1+2t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-2t} - \frac{1}{1+2t}$$

Возвращаемся к интегралу:

$$= \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{1-2t} - \int \frac{dt}{1+2t} = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln|1-2t| - \frac{1}{2}\ln|1+2t| + C = \ln\left|\frac{t}{\sqrt{(1-2t)(1+2t)}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{t}{\sqrt{1-4t^2}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin x}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}\right| + C.$$

Задача 2189. $\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx$

Решение. Делаем замену переменной: $t=\sqrt[3]{x},\ x=t^3,\ dx=3t^2dt$

$$\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx = \int t^3e^t3t^2dt = 3\int t^5e^tdt =$$

Интегрируем по частям нужное число раз:

$$= 3\int t^5 d\left(e^t\right) = 3\left(t^5e^t - 5\int t^4e^tdt\right) = 3\left(t^5e^t - 5\int t^4 d\left(e^t\right)\right) = 3\left(t^5e^t - 5t^4e^t + 20\int t^3e^tdt\right) =$$

$$= 3\left(t^5e^t - 5t^4e^t + 20\int t^3 d\left(e^t\right)\right) = 3\left(t^5e^t - 5t^4e^t + 20t^3e^t - 60\int t^2e^tdt\right) =$$

$$= 3\left(t^5e^t - 5t^4e^t + 20t^3e^t - 60\int t^2 d\left(e^t\right)\right) =$$

$$= 3\left(t^5e^t - 5t^4e^t + 20t^3e^t - 60t^2e^t + 120\int te^tdt\right) =$$

$$= 3\left(t^5e^t - 5t^4e^t + 20t^3e^t - 60t^2e^t + 120te^t - \int e^tdt\right) =$$

$$= 3\left(t^5e^t - 5t^4e^t + 20t^3e^t - 60t^2e^t + 120te^t - 120e^t\right) + C =$$

$$= 3e^t\left(t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120\right) + C =$$

$$= 3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120\right) + C.$$

Задача 2205. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}dx$

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int \frac{x\ln x}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}} & v=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{matrix}\right| = -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} =$$

Вычислим отдельно интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \left| t=\sqrt{x^2-1},\ t^2=x^2-1,\ x^2=t^2+1,\ xdx=tdt \right| =$$

$$= \int \frac{tdt}{\left(t^2+1\right)t} = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C$$

Возвращаемся к исходному интегралу:

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C.$$

Задача 2218. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^2} dx$

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^2} dx = \left| \begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg} x & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=\dfrac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2} & v=-\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)} \end{array} \right| = -\frac{\operatorname{arctg} x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

Используем для вычисления последнего интеграла рекуррентную формулу и получим

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)} =$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{4}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C.$$