

Решение контрольной работы по физике

Задача 1

К батарее с ЭДС $\mathcal{E}=300$ В подключены два плоских конденсатора емкостью $C_1 = 2$ пФ и $C_2 = 3$ пФ. Определить заряд Q и напряжение U на пластинах конденсаторов в двух случаях: 1) при последовательном соединении; 2) при параллельном соединении.

Решение:

1) При последовательном соединении:

$$Q_1 = Q_2, \text{ то есть } Q_1 = C_1 U_1 = Q_2 = C_2 U_2.$$

Из соотношения $C_1 U_1 = C_2 U_2$ найдем отношение напряжений на конденсаторах:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{3}{2}, \text{ откуда } U_1 = \frac{3}{2} U_2.$$

В то же время сумма напряжений на конденсаторах равна ЭДС батареи:

$$\begin{cases} U_1 + U_2 = 300 \\ U_1 = \frac{3}{2} U_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.5 U_2 = 300 \\ U_1 = 1.5 U_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_2 = 120 \text{ В} \\ U_1 = 180 \text{ В} \end{cases}.$$

Тогда $Q_1 = Q_2 = C_1 U_1 = 2 \text{ нФ} \cdot 180 \text{ В} = 360 \text{ нКл} = 0.36 \text{ нКл}$.

2) При параллельном соединении:

$$U_1 = U_2 = \mathcal{E} = 300 \text{ В}, \text{ тогда}$$

$$Q_1 = C_1 U_1 = 2 \text{ нФ} \cdot 300 \text{ В} = 600 \text{ нКл} = 0.6 \text{ нКл}.$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = 3 \text{ нФ} \cdot 300 \text{ В} = 900 \text{ нКл} = 0.9 \text{ нКл}.$$

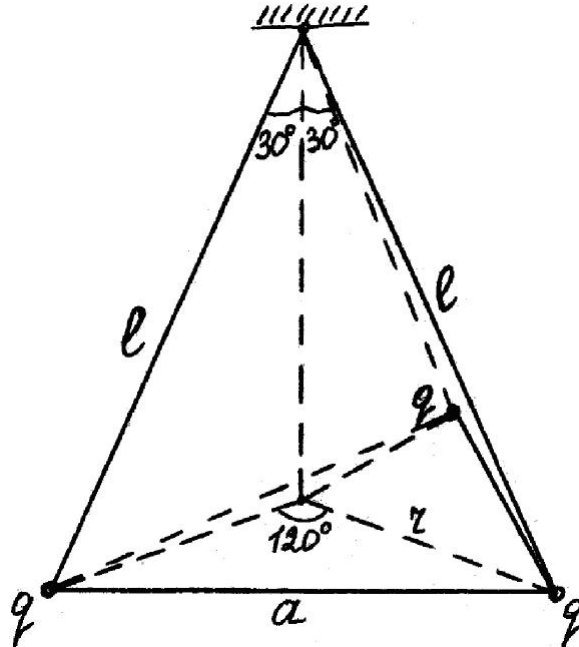
Ответ: 1) $Q_1 = Q_2 = 0.36 \text{ нКл}$, $U_1 = 180 \text{ В}$, $U_2 = 120 \text{ В}$.

2) $U_1 = U_2 = \mathcal{E} = 300 \text{ В}$, $Q_1 = 0.6 \text{ нКл}$, $Q_2 = 0.9 \text{ нКл}$.

Задача 2

Три одинаковых маленьких шарика массой $m = 0,12$ г подвешены к одной точке на нитях длиной $l = 20$ см. Какие заряды следует сообщить шарикам, чтобы каждая нить составляла с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$? Массу нити не учитывать.

Решение:



Из рисунка:

$$r = l \sin 30^\circ = l / 2.$$

По теореме косинуса

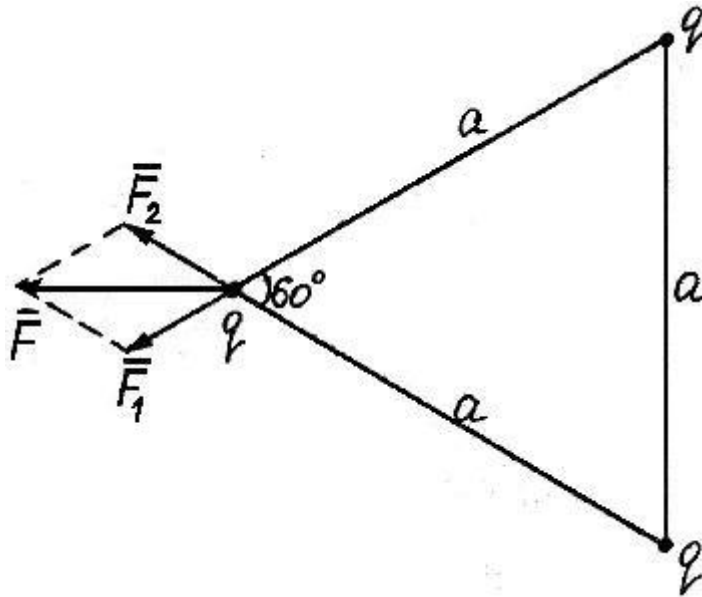
$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cos 120^\circ;$$

$$a^2 = 2r^2(1 - \cos 120^\circ) = 3r^2;$$

$$a = \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

Сила взаимодействия двух зарядов равна

$$F_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon a^2} = F_2.$$

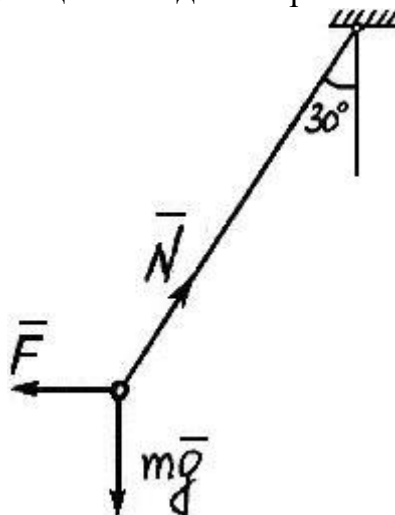


Найдем равнодействующую силу \vec{F} , действующую на заряд со стороны двух других, по теореме косинуса:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 60^\circ = 2F_1^2(1 + \cos 60^\circ) = 3F_1^2;$$

$$F = \sqrt{3}F_1 = \frac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon a^2} = \frac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon 3l^2/4} = \frac{\sqrt{3}q^2}{3\pi\epsilon_0\epsilon l^2}.$$

Изобразим силы, действующие на один шарик.



Запишем уравнение равновесия шарика в проекции на оси координат:

$$\begin{cases} \Sigma F_{kx} = 0; \\ \Sigma F_{ky} = 0; \\ N \sin 30^\circ - F = 0; \\ N \cos 30^\circ - mg = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N \sin 30^\circ = F; \\ N \cos 30^\circ = mg; \end{cases}$$

$$\frac{N \sin 30^\circ}{N \cos 30^\circ} = \frac{F}{mg};$$

$$mg \operatorname{tg} 30^\circ = F;$$

$$mg \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}q^2}{3\pi\epsilon_0\epsilon l^2};$$

$$\frac{mg}{\sqrt{3}} = \frac{q^2}{\sqrt{3}\pi\epsilon_0\epsilon l^2};$$

$$q = \sqrt{mg\pi\epsilon_0\epsilon \cdot l};$$

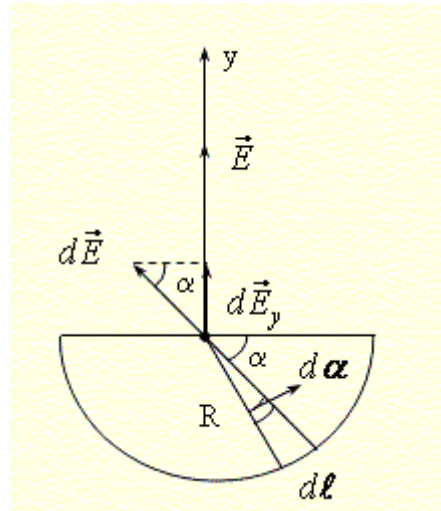
$$\begin{aligned} q &= \sqrt{0,12 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 0,2} = \\ &= 36,2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.} \end{aligned}$$

Ответ: $q = 36,2 \text{ нКл.}$

Задача 3

Тонкое полукольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $Q_1 = 0,2$ мкКл. Определить напряженность поля в центре кривизны полукольца, а также силу, действующую в этой точке на точечный заряд $Q_2 = 10$ нКл.

Решение:



Выделим на кольце элемент дуги dl , имеющий заряд dq . Модуль напряженности поля этого элемента в центре полукольца равен:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Из соображений симметрии ясно, что вектор \vec{E} в центре полукольца будет направлен вдоль оси y , следовательно

$$E = \int dE_y = \int dE \sin \alpha.$$

Элемент дуги dl имеет заряд:

$$dq = \lambda dl = \frac{Q_1}{\pi R} dl = \frac{Q_1}{\pi R} R d\alpha = \frac{Q_1}{\pi} d\alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\pi \frac{Q_1}{\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \alpha d\alpha = \frac{Q_1}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = -\frac{Q_1}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \cos \alpha \Big|_0^\pi = \\ &= -\frac{Q_1}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \cdot (-1 - 1) = \frac{Q_1}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}. \end{aligned}$$

Сила, действующая в этой точке на точечный заряд $Q_2 = 10$ нКл, равна:

$$F = Q_2 E = \frac{Q_1 Q_2}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

Подставляем значения:

$$E = \frac{0.2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}}{2\pi^2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot (0.1 \text{ м})^2} \approx 114.5 \text{ кВ/м}.$$

$$F = 10 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \cdot 114.5 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 114.5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл} = 1.145 \text{ мКл}.$$

Ответ: $E = 114.5 \text{ кВ/м}$, $F = 1.145 \text{ мКл}$.

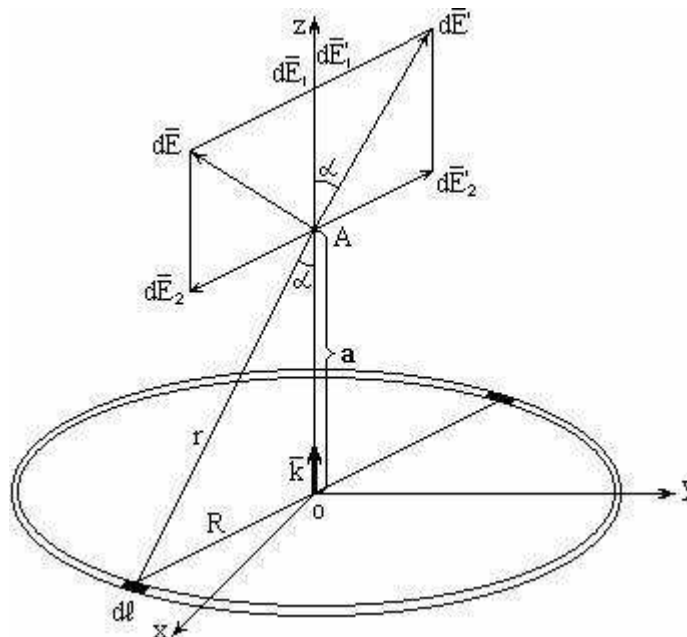
Задача 4

По тонкому кольцу радиусом $R = 6$ см равномерно распределен заряд $Q_1 = 24$ нКл. Какова напряженность поля в точке, находящейся на оси кольца на расстоянии $a = 18$ см от центра кольца? Найти также силу, действующую в этой точке на точечный заряд $Q_2 = 0,5$ нКл.

Решение:

Выделим на кольце малый участок длиной dl . Его заряд

$$dQ = Q_1 dl / (2\pi R).$$



Напряжённость поля, создаваемая этим зарядом в точке А, может быть записана в виде:

$$dE = \frac{Q_1 dl / (2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r}.$$

Разложим вектор $d\bar{E}$ на две составляющие: $d\bar{E}_1$ и $d\bar{E}_2$,

$$d\bar{E} = d\bar{E}_1 + d\bar{E}_2.$$

Напряженность \bar{E} поля в точке А найдём интегрированием:

$$E = \int_L d\bar{E}_1 + \int_L d\bar{E}_2,$$

где интегрирование ведётся по всем элементам заряженного кольца.

Заметим, что для каждой пары зарядов dQ и dQ' ($dQ = dQ'$), расположенных симметрично относительно центра кольца, векторы $d\bar{E}_2$ и $d\bar{E}_2'$ в точке А равны по

модулю и противоположны по направлению: $dE_2 = -dE'_2$. Поэтому векторная сумма $\int_L dE_2 = 0$.

Составляющие dE_1 для всех элементов кольца сонаправлены с осью Oz, т. е. $d\bar{E}_1 = \bar{k}dE_1$ (\bar{k} — единичный вектор). Тогда

$$\bar{E} = \bar{k} \int_L dE_1.$$

Так как $r = \sqrt{R^2 + a^2}$; $\cos \alpha = \frac{a}{r}$, то

$$dE_1 = dE \cos \alpha = \frac{Q_1 dl / (2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{Q_1 dl \cdot a}{8\pi^2 \epsilon_0 R (R^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{k} \int_0^{2\pi R} \frac{Q_1 dl \cdot a}{8\pi^2 \epsilon_0 R (R^2 + a^2)^{3/2}} = \bar{k} \cdot \frac{2\pi R Q_1 a}{8\pi^2 \epsilon_0 R (R^2 + a^2)^{3/2}} = \\ &= \bar{k} \cdot \frac{Q_1 a}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Вычислим:

$$E = \frac{24 \cdot 10^{-9} \cdot 0,18}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (0,06^2 + 0,18^2)^{3/2}} = 5687 \text{ В/м.}$$

Сила, действующая на заряд Q_2 со стороны кольца, равна

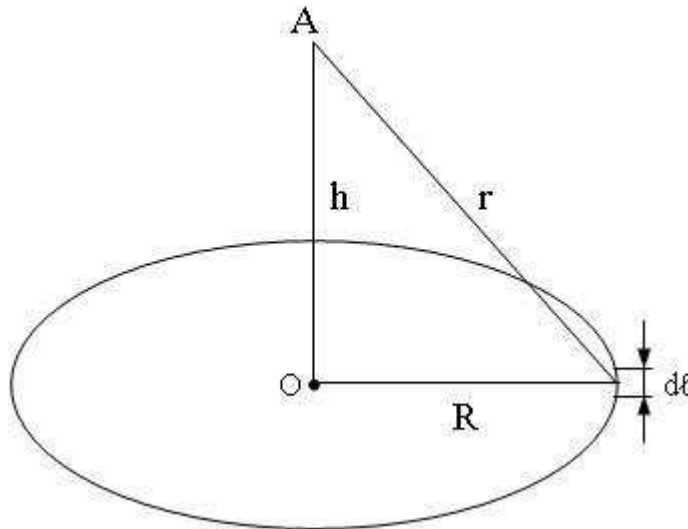
$$F = Q_2 E = 5 \cdot 10^{-10} \cdot 5687 = 2,84 \cdot 10^{-6} \text{ Н} = 2,84 \text{ мкН.}$$

Ответ: $E = 5687 \text{ В/м}$, $F = 2,84 \text{ мкН}$.

Задача 5

Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом $R = 10$ см. Он равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 300$ нКл/м. Определить потенциал в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии $h = 20$ см от его центра.

Решение:



Выделим элементарный участок кольца длиной dl с зарядом τdl . Он создаёт в точке A потенциал

$$d\phi = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Суммарный потенциал найдём по принципу суперпозиций, проинтегрировав по всему кольцу:

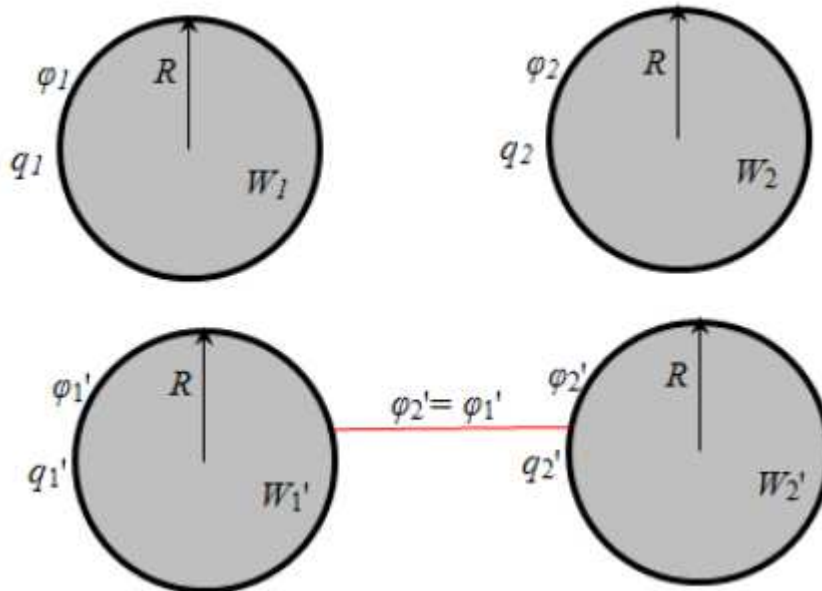
$$\phi = \int_0^{2\pi R} \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau \cdot 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + h^2}};$$
$$\phi = \frac{300 \cdot 10^{-9} \text{ Кл / м} \cdot 2\pi \cdot 0.1 \text{ м}}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф / м} \cdot \sqrt{0.1^2 + 0.2^2}} \approx 7.58 \cdot 10^3 \text{ В} = 7.58 \text{ кВ.}$$

Ответ: $\phi = 7.58$ кВ.

Задача 6

Два металлических шарика радиусами $R_1=3$ см и $R_2=2$ см имеют: первый – заряд $Q_1=10$ нКл, второй – потенциал $\phi_2=9$ кВ. Найти энергию, которая выделится при разряде, если шары соединить проводником.

Решение:



Найдем энергию шаров до соединения:

Энергия шара 1:

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} = \frac{q_1^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} = \frac{(10^{-8} \text{ Кл})^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 1 \cdot 0.03 \text{ м}} \approx 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

Энергия шара 2:

$$W_2 = \frac{C_2\phi_2^2}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2\phi_2^2}{2} = \frac{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 1 \cdot 0.02 \text{ м} \cdot (9000 \text{ В})^2}{2} \approx 9 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

После соединения шаров 1 и 2 их потенциалы будут равны:

$$\phi_1' = \phi_2'$$

$$\frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} = \frac{q_2'}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2} = \frac{(q_1 + q_2) - q_1'}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2}$$

В результате заряд шара 1 после соединения шаров:

$$\frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} = \frac{(q_1 + q_2) - q_1'}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2}$$

$$\frac{q_1'}{R_1} + \frac{q_1'}{R_2} = \frac{(q_1 + q_2)}{R_2} \Rightarrow q_1' = \frac{(q_1 + q_2)}{R_2} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = (q_1 + q_2) \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Заряд шара 2 до соединения:

$$q_2 = 4\pi\epsilon_0\epsilon R_2\phi_2 = 4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 1 \cdot 0.02 \text{ м} \cdot 9000 \text{ В} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} = 20 \text{ нКл.}$$

В результате:

$$q_1' = (10 + 20) \text{ нКл} \cdot \frac{3 \text{ см}}{3 \text{ см} + 2 \text{ см}} = 18 \text{ нКл.}$$

Заряд шара 2 после соединения шаров:

$$q_2' = (q_1 + q_2) - q_1' = 10 + 20 - 18 = 12 \text{ нКл.}$$

Энергия соединенных шаров:

$$\begin{aligned} W' &= W_1' + W_2' = \frac{q_1'^2}{2C_1} + \frac{q_2'^2}{2C_2} = \frac{q_1'^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} + \frac{q_2'^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0\epsilon R_2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \left(\frac{q_1'^2}{R_1} + \frac{q_2'^2}{R_2} \right) = \\ &= \frac{1}{8\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 1} \cdot \left(\frac{(18 \cdot 10^{-9} \text{ Кл})^2}{0.03 \text{ м}} + \frac{(12 \cdot 10^{-9} \text{ Кл})^2}{0.02 \text{ м}} \right) \approx 8.09 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Энергия, которая выделится при разряде:

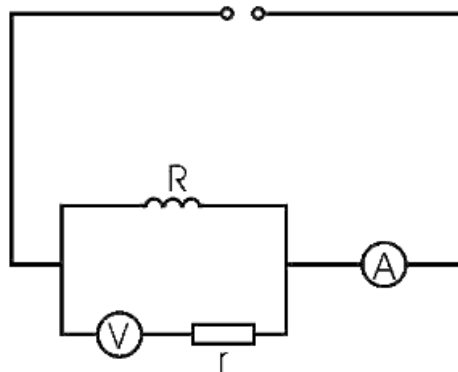
$$\Delta W = W_1 + W_2 - W' = (1.5 + 9 - 8.09) \cdot 10^{-5} = 2.41 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} = 24.1 \text{ мкДж.}$$

Ответ: $\Delta W = 24.1 \text{ мкДж.}$

Задача 7

Катушка и амперметр соединены последовательно и присоединены к источнику тока. К клеммам катушки присоединен вольтметр с сопротивлением $r = 2$ кОм. Амперметр показывает $I = 0,25$ А, вольтметр $U = 100$ В. Определить сопротивление катушки. Сколько процентов составит ошибка, если при определении сопротивления катушки не будет учтено сопротивление вольтметра?

Решение:



Так как катушка и вольтметр соединены параллельно, то их общее сопротивление найдем как:

$$\frac{1}{R_{\text{сум}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}.$$

Из закона Ома имеем:

$$I = \frac{U}{R_{\text{сум}}}, \text{ тогда } I = \frac{U}{R_{\text{сум}}} = U \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right), \text{ откуда искомое сопротивление}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{U} - \frac{1}{r}} = \frac{Ur}{Ir - U} = \frac{100 \text{ В} \cdot 2000 \text{ Ом}}{0,25 \text{ А} \cdot 2000 \text{ Ом} - 100 \text{ В}} = 500 \text{ Ом}.$$

Если сопротивление вольтметра не учитывать, то:

$$R' = \frac{1}{\frac{1}{U}} = \frac{U}{I} = \frac{100 \text{ В}}{0,25 \text{ А}} = 400 \text{ Ом}.$$

$$\text{Тогда погрешность: } \delta = \frac{R - R'}{R} = \frac{500 - 400}{500} = 0,2 = 20 \text{ \%}.$$

Ответ: $R = 500 \text{ Ом}$, $\delta = 20 \text{ \%}$.

Задача 8

Ток в проводнике сопротивлением $r = 100$ Ом за время $t = 30$ с равномерно нарастает от $I_1 = 0$ до $I_2 = 10$ А. Определить теплоту Q , выделившуюся за это время в проводнике.

Решение:

По условию сила тока нарастает равномерно, то есть можно записать:

$$I = kt .$$

При $t = \tau$ имеем $I_2 = k\tau$, откуда $k = \frac{I_2}{\tau}$.

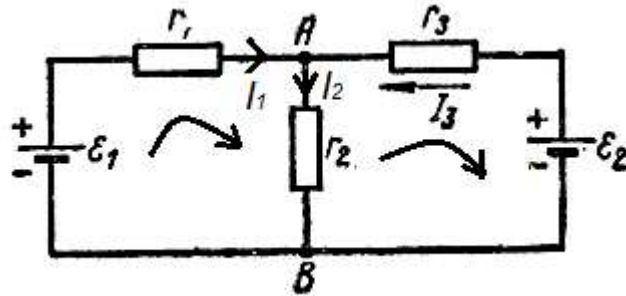
Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме:

$$\begin{aligned} Q &= \int I^2 R dt = \int_0^{\tau} k^2 t^2 R dt = \frac{k^2 R \tau^3}{3} = \frac{I_2^2 R \tau^3}{3\tau^2} = \frac{I_2^2 R \tau}{3} = \\ &= \frac{(10 \text{ A})^2 \cdot 100 \text{ Ом} \cdot 30 \text{ с}}{3} = 10^5 \text{ Дж} = 100 \text{ кДж}. \end{aligned}$$

Ответ: $Q = 100$ кДж.

Задача 9

Три сопротивления $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = 1$ Ом и $r_3 = 3$ Ом, а также источник тока $\varepsilon_1 = 1,4$ В соединены, как показано на рис. Определить ЭДС источника, который надо подключить в цепь между точками А и В, чтобы в сопротивлении r_3 шел ток силой 1 А в направлении, указанном стрелкой. Сопротивлением источников тока пренебречь.



Решение:

Составим систему в соответствии с первым и вторым законами Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ \varepsilon_1 = I_1 r_1 + I_2 r_2 \\ -\varepsilon_2 = -I_2 r_2 - I_3 r_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 - I_2 + 1 = 0 \\ 1.4 = 5I_1 + I_2 \\ \varepsilon_2 = I_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 - I_2 + 1 = 0 \\ I_2 = 1.4 - 5I_1 \\ \varepsilon_2 = I_2 + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 - 1.4 + 5I_1 + 1 = 0 \\ I_2 = 1.4 - 5I_1 \\ \varepsilon_2 = I_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 1/15 \\ I_2 = 16/15 \\ \varepsilon_2 = 16/15 + 3 = 4.067 \text{ В.} \end{cases}$$

Ответ: $\varepsilon_2 = 4.067$ В.

Задача 10

ЭДС батареи аккумуляторов $E = 12$ В, сила тока I короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность P_{\max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

Решение:

Закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

При коротком замыкании $R = 0$, тогда

$$I_{\text{кз}} = \frac{\mathcal{E}}{r} \Rightarrow r = \frac{\mathcal{E}}{I_{\text{кз}}} = \frac{12}{5} = 2.4 \text{ Ом}.$$

$$\text{Мощность цепи: } P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}.$$

Для определения экстремума находим производную:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR} &= \frac{\mathcal{E}^2 (R + r)^2 - \mathcal{E}^2 R \cdot 2(R + r)}{(R + r)^4} = \frac{\mathcal{E}^2 (R + r) - 2\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^3} = \\ &= \frac{\mathcal{E}^2 (R + r - 2R)}{(R + r)^3} = \frac{\mathcal{E}^2 (r - R)}{(R + r)^3}. \end{aligned}$$

Производная равна 0 при $R = r = 2.4$ Ом, тогда

$$P_{\max} = \frac{(12 \text{ В})^2 \cdot 2.4 \text{ Ом}}{(2.4 + 2.4)^2} = 15 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P_{\max} = 15 \text{ Вт}.$