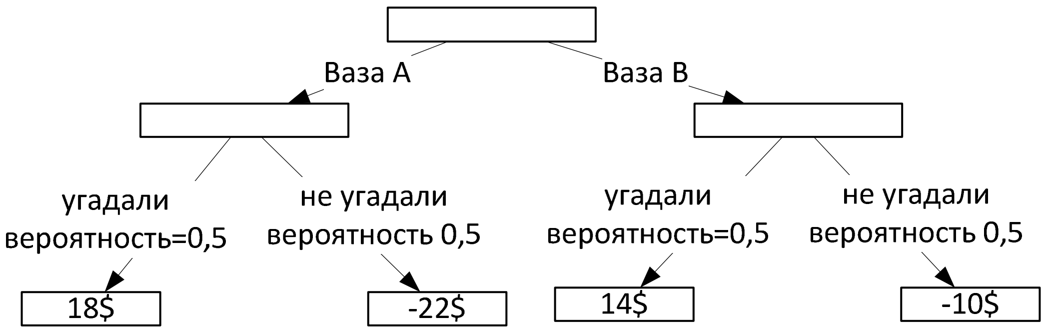
Системный анализ
Решенная контрольная работа

Задача 1

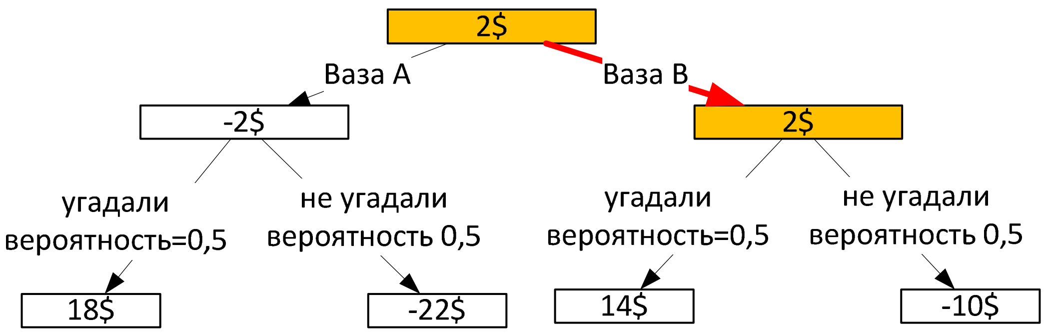
В соответствии с теорией полезности оценить ожидаемую полезность действий Д1 (угадать вазу типа А) или Д2 (угадать вазу типа В) для задачи с вазами и выбрать оптимальное решение. В качестве функции полезности рекомендуется оценить среднюю (ожидаемую) полезность каждого из действий.
Построить и свернуть дерево решений.
Формулировка задачи с вазами.
В наличии имеются два типа ваз (ваза типа А и ваза типа В). Ваз типа А – M штук, ваз типа В – N штук. Наугад взяли одну из ваз. Если Вы угадали вазу типа А, то получаете P$, не угадали – получаете штраф R$. Если Вы угадали вазу типа В, то получаете T$, не угадали – получаете штраф Q$.
Данные к задаче:

M	N	P	R	T	Q
50	50	18	22	14	10

Решение.
Поскольку ваз поровну (50/50) то вероятность угадывания или не угадывания одинакова, и равна 0,5.
Строим дерево решений.



Считаем выигрыш при назывании вазы А: 18*0,5-22*0,5 = -2$
Считаем выигрыш при назывании вазы В: 14*0,5-10*0,5 = 2$



Наибольший выигрыш – при назывании вазы В.

Задача 2

Какой из кандидатов A, B или C выиграет выборы для заданного распределения голосов по методу Кондорсе и по методу Борда? Привести пояснения.
Данные к задаче:

Число голосовавших	Предпочтение
42	$A \to B \to C$
30	$A \to C \to B$
45	$C \to B \to A$
44	$B \to C \to A$
32	$C \to A \to B$
38	$B \to A \to C$

Решение.
По методу Кондорсе.
Сравниваем кандидатов попарно следующим образом.
Например, сравниваем кандидатов A и B.

Число голосовавших	Предпочтение	Сравнение A и B
42	$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \to C$	$A \to B$
30	$\boldsymbol{A} \to C \to \boldsymbol{B}$	$A \to B$
45	$C \to \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$	$B \to A$
44	$\boldsymbol{B} \to C \to \boldsymbol{A}$	$B \to A$
32	$C \to \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$	$A \to B$
38	$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A} \to C$	$B \to A$

Количество предпочтений $A \to B = 42 + 30 + 32 = 104$.
Количество предпочтений $B \to A = 45 + 44 + 38 = 127$.
Записываем пару AB как 104 – 127, то есть у кандидата A по сравнению с B 104 голоса против 127.
Аналогично сравниваем попарно других кандидатов.

Сравнение	Голоса
AB	104 - 127
AC	110 - 121
BC	124 - 107

Кандидат A проигрывает и B и C.
Кандидат B выигрывает у C.
Получаем предпочтения: $B \to C \to A$.

По методу Борда.
Считаем количество баллов (3 – за 1-е место, 2 – за 2-е место, 1 – за 3-е место):
A: 42*3+30*3+45*1+44*1+32*2+38*2=445
B: 42*2+30*1+45*2+44*3+32*1+38*3=482
C: 42*1+30*2+45*3+44*2+32*3+38*1=459
В соответствии с методом Борда предпочтения:
$B \to C \to A$ (482 > 459 > 445).

Задача 3

Решить задачу по теории массового обслуживания.
Муниципальной власти для очередников района выделяют в среднем 85 квартир в год. Сколько семей в среднем стоит в очереди на получение муниципального жилья в районе, если каждый месяц на учет встают 7 семей.

Решение.
Поток заявок $\lambda = 7$ в месяц $= 7*12 = 84$ квартир в год.
Поток обслуживания $\mu = 85$ квартир в год.
Интенсивность нагрузки.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{84}{85} = 0{,}988$$

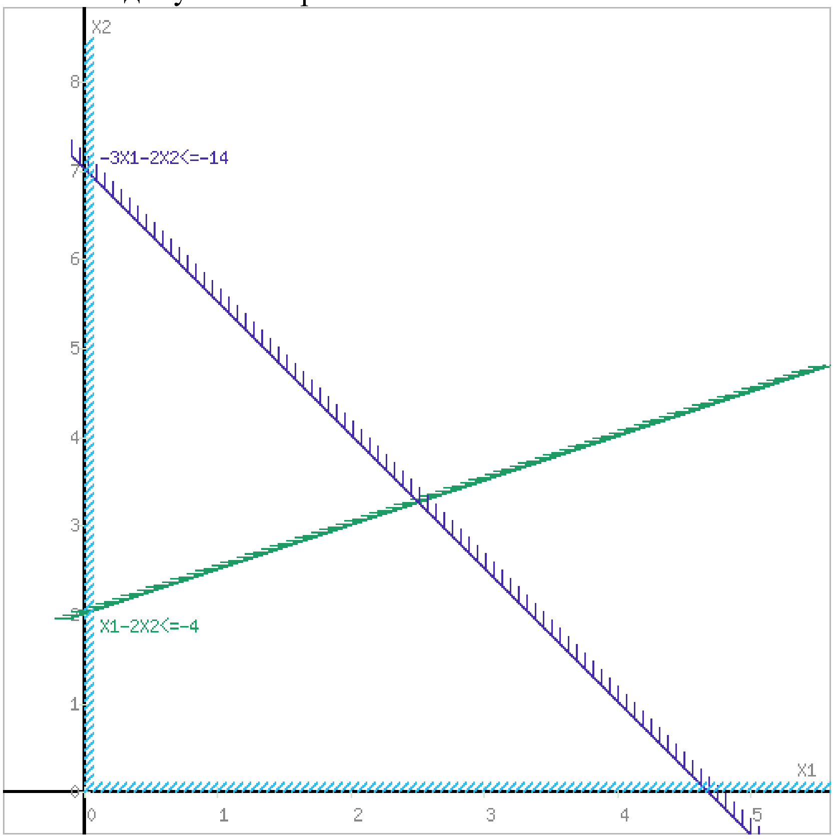
Поскольку $\rho < 1$, то очередь не будет расти бесконечно, следовательно, предельные вероятности существуют.
Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди).

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0{,}988^2}{1 - 0{,}988} = 83{,}01$$ семей стоят в очереди.

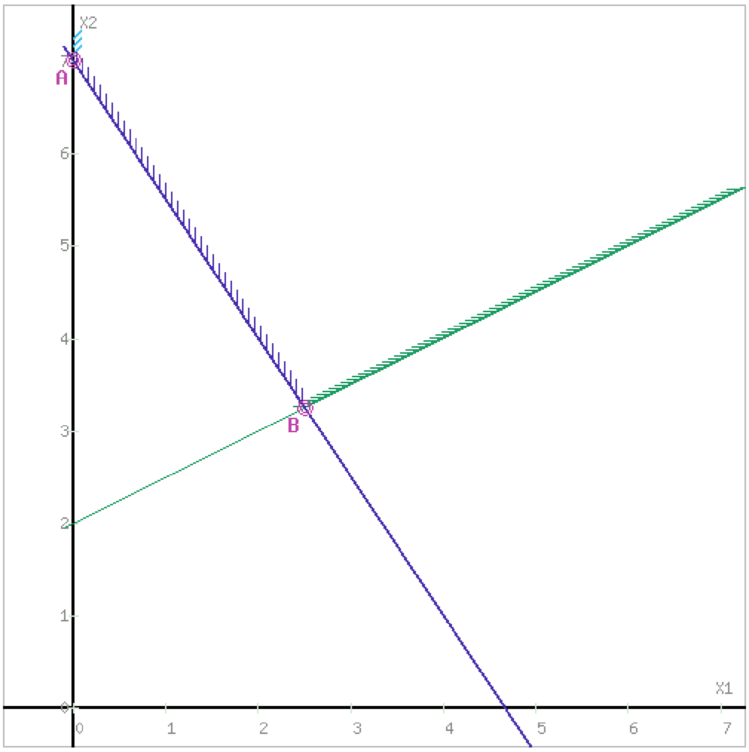
Задача 4

Решить задачу по теории линейного программирования на нахождение максимума. Решение осуществить Симплекс-методом. Дать необходимые пояснения.
$F(x) = x_1 - x_2 \to \max$,
$-x_1 + 2x_2 \geq 4$,
$3x_1 + 2x_2 \geq 14$,
$x_1, x_2 \geq 0$.

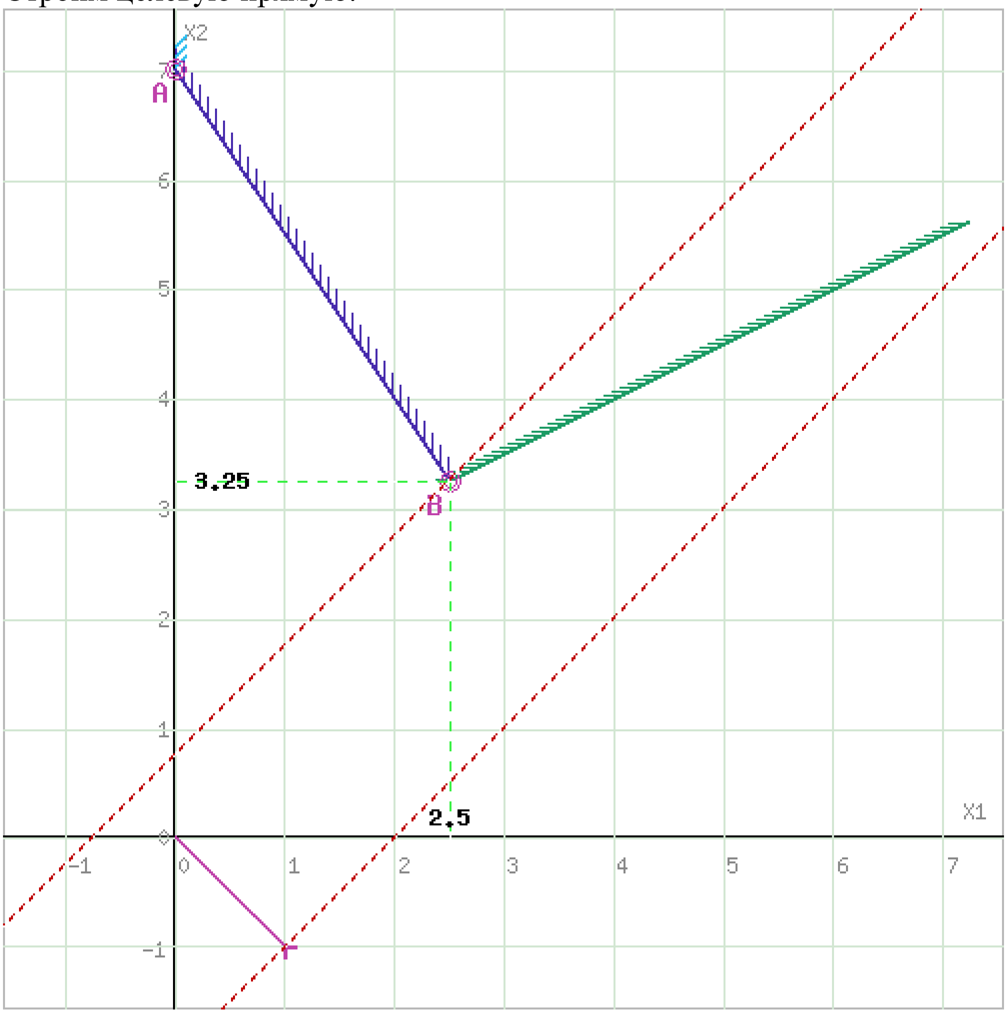
Решение.
Задача не имеет решения при данных ограничениях.
Изобразим на плоскости область допустимых значений и целевую прямую.
Область допустимых решений.



Границы области многоугольника решений.



Строим целевую прямую.



Как видим, прямую можем перемещать бесконечно, и она будет пересекать ОДЗ.

Пробуем изменить ограничения.
Определим максимальное значение целевой функции
$F(X) = x_1 - x_2$
при следующих условиях-ограничений.
$-x_1+2x_2 \le 4$
$3x_1+2x_2 \le 14$
Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (переход к канонической форме).
$-1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 4$
$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 14$
Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_3, x_4
Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план:
X1 = (0,0,4,14)

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	4	-1	2	1	0
x_4	14	3	2	0	1
F(X)	0	-1	1	0	0

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1} и из них выберем наименьшее:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	min
x_3	4	-1	2	1	0	-
x_4	14	3	2	0	1	4,67
F(X)	0	-1	1	0	0	0

Формируем следующую часть симплексной таблицы.
Вместо переменной x_4 в план 1 войдет переменная x_1
После преобразований получаем новую таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	8,67	0	2,67	1	0,33
x_1	4,67	1	0,67	0	0,33
F(X)	4,67	0	1,67	0	0,33

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.
Оптимальный план:
$x_1 = 4,67$
$F(X) = 1 \cdot 4,67 = 4,667.$

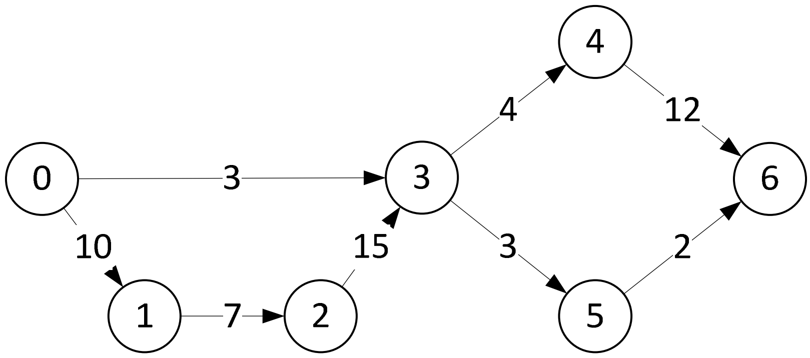
Задача 5

Для представленной ниже работы в соответствии с предложенной в конце контрольной работы методикой составить сетевой график, рассчитать его характеристики и оптимизировать.
Работа:
Строительство подземного гаража

Решение.
Составляем перечень работ.

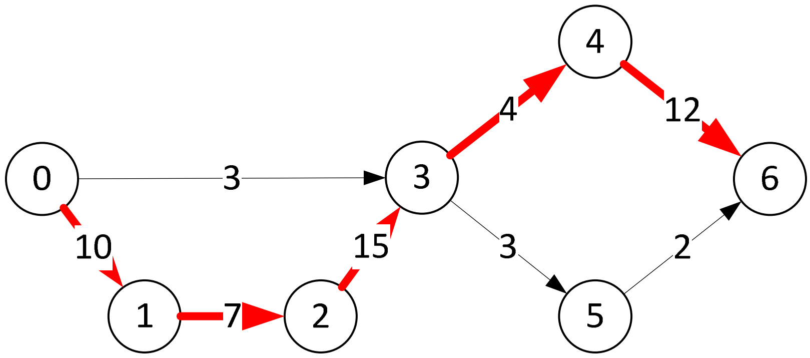
Работы	Наименование	Длительность (дни)
0-1	Рытье котлована	10
1-2	Укладка фундамента	7
2-3	Кладка стен и крыши	15
0-3	Подведение электричества	3
3-4	Выравнивание земли вокруг гаража	4
3-5	Заливка дороги бетоном	3
4-6	Внутренняя отделка	12
5-6	Установка ворот	2

Граф.



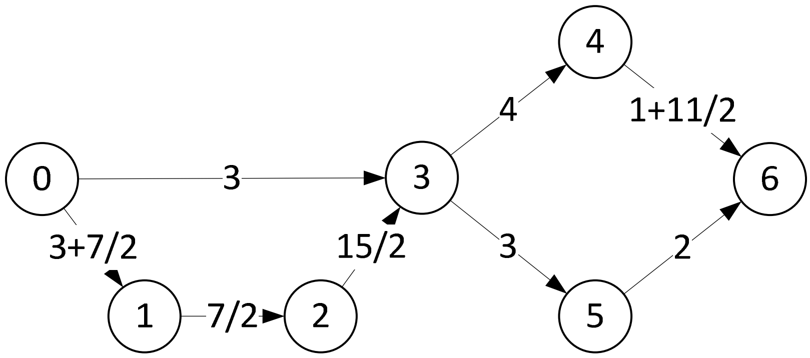
Рассчитываем длительности путей:
T_1 = 0-3-4-6 = 19 дней.
T_2 = 0-3-5-6 = 8 дней.
T_3 = 0-1-2-3-4-6 = 48 дней.
T_4 = 0-1-2-3-5-6 = 37 дней.

Критический путь (0-1-2-3-4-6) равен 48 дням.



Определение полных резервов времени:
$R(L_1) = T_{кр} - T_1 = 29$ дней
$R(L_2) = T_{кр} - T_2 = 40$ дней,
$R(L_3) = T_{кр} - T_3 = 0$ дней,
$R(L_4) = T_{кр} - T_4 = 11$ дней.

Данный сетевой график построен в предположении выполнения каждой работы 1 человеком.
Однако 1 человек не может одновременно делать работы 0-3 и 0-1, но график это предусматривает.
Следовательно, изменяем график для 2 человек.
Пока 1 человек делает работу (0-3) 3 дня, второй человек делает работу (0-1), затем они начинают работать вместе, производительность увеличивается в 2 раза, время выполнения сокращается.



Рассчитываем длительности путей:
T_1 = 0-3-4-6 = 13,5 дней.
T_2 = 0-3-5-6 = 8 дней.
T_3 = 0-1-2-3-4-6 = 28 дней.
T_4 = 0-1-2-3-5-6 = 22,5 дней.

Критический путь сократился до 28 дней.

Задача 6

В предположении линейной регрессии необходимо рассчитать ее основные параметры и с использованием критерия Фишера определить достоверность гипотезы о линейной зависимости. Методика представлена в конце контрольной работы.
Ниже для ряда X {1 ÷ 20} по вариантам представлены значения ряда Y.
Ряд Y

2,7	3,6	5,4	6,2	7,9	8,9	9,3	11,5	10,3	12,6	12,5	14,1	15,5	16,5	19,5	18,3	21,5	21,5	21,5	23,8

Решение.
Строим расчетную таблицу.

x	y	x^2	y^2	x • y
2,7	1	7,29	1	2,7
3,6	2	12,96	4	7,2
5,4	3	29,16	9	16,2
6,2	4	38,44	16	24,8
7,9	5	62,41	25	39,5
8,9	6	79,21	36	53,4
9,3	7	86,49	49	65,1
11,5	8	132,25	64	92
10,3	9	106,09	81	92,7
12,6	10	158,76	100	126
12,5	11	156,25	121	137,5
14,1	12	198,81	144	169,2
15,5	13	240,25	169	201,5
16,5	14	272,25	196	231
19,5	15	380,25	225	292,5
18,3	16	334,89	256	292,8
21,5	17	462,25	289	365,5
21,5	18	462,25	324	387
21,5	19	462,25	361	408,5
23,8	20	566,44	400	476
263,1	210	4248,95	2870	3481,1

Система уравнений по МНК.
$a \cdot n + b\sum x = \sum y$
$a\sum x + b\sum x^2 = \sum y \cdot x$
Для наших данных система уравнений имеет вид
$20a + 263{,}1\ b = 210$
$263{,}1\ a + 4248{,}95\ b = 3481{,}1$

Решаем, получаем коэффициенты регрессии:
$b = 0{,}912$,
$a = -1{,}4976$.

Уравнение регрессии: y = 0,912 x + 1,4976.

Рассчитываем коэффициент детерминации.

x	y	y(x)	$(y_i-y_{cp})^2$	$(y-y(x))^2$
2,7	1	0,96	90,25	0,00123
3,6	2	1,79	72,25	0,0459
5,4	3	3,43	56,25	0,18
6,2	4	4,16	42,25	0,0246
7,9	5	5,71	30,25	0,5
8,9	6	6,62	20,25	0,38
9,3	7	6,98	12,25	0,00025
11,5	8	8,99	6,25	0,98
10,3	9	7,9	2,25	1,22
12,6	10	9,99	0,25	3,8E-5
12,5	11	9,9	0,25	1,2
14,1	12	11,36	2,25	0,41
15,5	13	12,64	6,25	0,13
16,5	14	13,55	12,25	0,2
19,5	15	16,29	20,25	1,66
18,3	16	15,19	30,25	0,65
21,5	17	18,11	42,25	1,23
21,5	18	18,11	56,25	0,0123
21,5	19	18,11	72,25	0,79
23,8	20	20,21	90,25	0,0434
263,1	210	210	665	9,67

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - y_x)^2}{\sum(y_i - \overline{y})^2} = 1 - \frac{9,67}{665} = 0,9855$$

Полученное уравнение регрессии на 98,55% объясняет поведение Y в зависимости от изменения X.

Оцениваем значимость коэффициента детерминации и уравнения регрессии в целом критерием Фишера.

Фактическое значение F-критерия:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2}\frac{(n - m -1)}{m}$$

$$F = \frac{0,9855}{1 - 0,9855}\frac{(20-1-1)}{1} = 1219,78$$

где m=1 для парной регрессии.

Табличное значение критерия со степенями свободы $k_1=1$ и $k_2=18$, $F_{табл} = 4,41$

Поскольку фактическое значение $F > F_{табл}$, то коэффициент детерминации статистически значим (уравнение регрессии также значимо).

Задача 7

Воспользовавшись положениями теории игр решить следующие задачи.
Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2
A_1	1	0
A_2	0	1/2

Определите частоты p_1 и p_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока А.

Решение.
Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку.

Игроки	B_1	B_2	$a = \min(A_i)$
A_1	1	0	0
A_2	0	0.5	0
$b = \max(B_i)$	1	0.5	

Нижняя цена игры:
$a = \max(a_i) = 0$
Верхняя цена игры:
$b = \min(b_j) = 0,5$
Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как $a \neq b$, тогда цена игры находится в пределах $0 \leq y \leq 0,5$.
Находим решение игры в смешанных стратегиях.
Запишем систему уравнений.
Для игрока I
$p_1 = y$
$0,5p_2 = y$
$p_1+p_2 = 1$
Для игрока II
$q_1 = y$
$0,5q_2 = y$
$q_1+q_2 = 1$
Решая эти системы, находим:
$y = {}^1/_3$
$p_1 = {}^1/_3$ (вероятность применения 1-ой стратегии).
$p_2 = {}^2/_3$ (вероятность применения 2-ой стратегии).
Оптимальная смешанная стратегия игрока I: $P = ({}^1/_3; {}^2/_3)$
$q_1 = {}^1/_3$ (вероятность применения 1-ой стратегии).
$q_2 = {}^2/_3$ (вероятность применения 2-ой стратегии).
Оптимальная смешанная стратегия игрока II: $Q = ({}^1/_3; {}^2/_3)$
Цена игры: $y = {}^1/_3$