Решенная контрольная работа по МОР

1. Построить симплексную таблицу ЗЛП

$$Q = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 13 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 11 \\ x_1 \geq 0;\ \ x_2 \geq 0;\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Приводим задачу к каноническому виду. Для этого в первое неравенство вводим дополнительную переменную x_4 со знаком минус, так как знак неравенства $\geq$, а также искусственный базис z_1. Во второе уравнение вводим искусственный базис z_2. В третье неравенство вводим дополнительную переменную x_5 со знаком плюс, так как знак неравенства $\leq$.

Тогда, можем записать:

$$Q = x_1 - 3x_2 - 2x_3 + z_1 + z_2 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + z_1 = 13 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + z_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 11 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

Дальнейшее решение представим в симплекс – таблицах.

Таблица 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				1	-3	-2	0	0	1	1		
2	Базис	Сб	b	x1	x2	x3	x4	x5	z1	z2	Отношения	Коэфф.
3	z1	1	13	3	1	-2	-1	0	1	0	4,33	3,00
4	z2	1	1	1	-3	1	0	0	0	1	1,00	-
5	x5	0	11	1	2	3	0	1	0	0	11,00	1,00
6		Q	0	-1	3	2	0	0	0	0		
7			14	-4	2	1	1	0	0	0		

Так как задача на нахождение максимального значения целевой функции, то в индексной второй строке выбираем наибольшую по модулю отрицательную оценку, которая находится в столбце с переменной x_1. Выделим столбец. Далее, находим оценочные отношения делением столбца C на столбец D, из которых выбираем наименьшее – это вторая строка, которую также выделим. В последний столбец запишем пересчитывающие коэффициенты, которые необходимы для пересчёта первой и третьей строк. Вторую строку перепишем без изменений. Из базиса выводим искусственный базис z_2, при этом в базис вводим переменную x_1. Первую и треть строки пересчитываем по методу Гаусса. Столбец, который соответствовал искусственному базису z_2, в дальнейшем не учитываем. В результате перейдём к таблице 2.

Таблица 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				1	-3	-2	0	0	1	1		
2	Базис	Cб	b	x1	x2	x3	x4	x5	z1	z2	Отношения	Коэфф.
10	z1	1	10	0	10	-5	-1	0	1		1	-
11	x1	1	1	1	-3	1	0	0	0		-	-0,3
12	x5	0	10	0	5	2	0	1	0		2	0,5
13		Q	1	0	0	3	0	0	0			
14			10	0	-10	5	1	0	-1			

План не оптимален, так как в базисе присутствует искусственный базис. Требуется улучшение плана. Снова в индексной строке выбираем наибольшую по модулю отрицательную оценку, которая находится в столбце с переменной x_2. Выделим столбец. Наименьшее оценочное отношение находится в первой строке, которую также выделим. Из базиса будем выводить искусственный базис z_1, при этом в базис вводим переменную x_2. Элементы первой строке делим на 10, а вторую и третью строки пересчитываем по методу гаусса. В результате получим таблицу 3.

Таблица 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				1	-3	-2	0	0	1	1		
2	Базис	Cб	b	x1	x2	x3	x4	x5	z1	z2	Отношения	Коэфф.
17	x2	-3	1	0	1	-0,5	-0,1	0				
18	x1	1	4	1	0	-0,5	-0,3	0				
19	x5	0	5	0	0	4,5	0,5	1				
20			1	0	0	3	0	0				

Так как в индексной строке нет отрицательных оценок, то получен оптимальный план: $Q_{\max}(4;1;0)=1$.

2. Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры, заданной матрицей

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} .$$

Какому игроку выгодна эта игра?

Решение

Шаг:1

Определим нижнюю цену игры - α

Нижняя цена игры α — это максимальный выигрыш, который мы можем гарантировать себе, в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры будем использовать одну и только одну стратегию (такая стратегия называется "чистой").

Найдем в каждой строке платежной матрицы **минимальный** элемент и запишем его в дополнительный столбец (таблица 1).

Затем найдем **максимальный** элемент дополнительного столбца (отмечен звездочкой), это и будет нижняя цена игры.

Таблица 1

	Стратегии "B"		
Стратегии "A"	B_1	B_2	*Минимумы строк*
A_1	-4	3	**-4***
A_2	8	-5	-5

В нашем случае нижняя цена игры равна: **α = -4**, и для того чтобы гарантировать себе выигрыш не хуже чем -4 мы должны придерживаться стратегии A_1.

Шаг:2

Определим верхнюю цену игры - β

Верхняя цена игры β — это минимальный проигрыш, который может гарантировать себе игрок "B", в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры он будет использовать одну и только одну стратегию. Найдем в каждом столбце платежной матрицы **максимальный** элемент и запишем его в дополнительную строку снизу (таблица 2).

Затем найдем **минимальный** элемент дополнительной строки (отмечен плюсом), это и будет верхняя цена игры.

Таблица 2

	Стратегии "B"		
Стратегии "A"	B_1	B_2	*Минимумы строк*
A_1	-4	3	**-4***
A_2	8	-5	-5
Максимумы столбцов	8	**3+**	

В нашем случае верхняя цена игры равна: **β = 3**, и для того чтобы гарантировать себе проигрыш не хуже чем 3 противник (игрок "B") должен придерживаться стратегии B_2

Шаг:3

Сравним нижнюю и верхнюю цены игры, в данной задаче они различаются, т.е. $\alpha \neq \beta$, платежная матрица не содержит седловой точки. Это значит, что игра не имеет решения в чистых минимаксных стратегиях, но она всегда имеет решение в смешанных стратегиях.

Смешанная стратегия, это чередуемые случайным образом чистые стратегии, с определенными вероятностями (частотами).

Смешанную стратегию игрока "A" будем обозначать

$$S_A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix},$$

где A_1, A_2 - стратегии игрока "A", а p_1, p_2 - соответственно вероятности (частоты), с которыми эти стратегии применяются, причем $p_1 + p_2 = 1$.

Аналогично смешанную стратегию игрока "B" будем обозначать

$$S_B = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix},$$

где B_1, B_2 - стратегии игрока "B", а q_1, q_2 - соответственно вероятности, с которыми эти стратегии применяются, причем $q_1 + q_2 = 1$.

Оптимальная смешанная стратегия для игрока "A" та, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш. Соответственно для "B" - минимальный проигрыш. Обозначаются эти стратегии S_A^* и S_B^* соответственно. Пара оптимальных стратегий образует решение игры.

В общем случае в оптимальную стратегию игрока могут входить не все исходные стратегии, а только некоторые из них. Такие стратегии называются **активными стратегиями**.

Шаг:4

Найдём оптимальную стратегию для игрока А.

Если предположить, что игрок "В" будет пользоваться чистой стратегией B_1, то средний выигрыш v составит:

$$k_{11}p_1 + k_{21}p_2 = v \qquad \textbf{(1)}$$

С другой стороны, если предположить, что игрок "В" будет пользоваться чистой стратегией B_2, то средний выигрыш составит:

$$k_{12}p_1 + k_{22}p_2 = v \qquad \textbf{(2)}$$

Приравнивая левые части уравнений (1) и (2) получим

$$k_{11}p_1 + k_{21}p_2 = k_{12}p_1 + k_{22}p_2,$$

С учётом того, что $p_1 + p_2 = 1$, имеем

$$k_{11}p_1 + k_{21}(1-p_1) = k_{12}p_1 + k_{22}(1-p_1),$$

Откуда найдём оптимальную частоту стратегии A_1:

$$p_1 = \frac{k_{22}-k_{21}}{k_{11}+k_{22}-k_{12}-k_{21}} = \frac{-5-8}{-4-5-3-8} = \frac{13}{20}.$$

Вероятность p_2 найдём вычитанием p_1 из единицы: $p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$.

Шаг 5:

Найдём цену игры: $v = k_{11}p_1 + k_{21}p_2 = -4\cdot\frac{13}{20} + 8\cdot\frac{7}{20} = \frac{1}{5}$.

Шаг 6:

Найдём оптимальную стратегию для игрока В.

Если игрок "В" использует свою оптимальную стратегию, а игрок "А" остается в рамках своих активных стратегий, то средний выигрыш остается неизменным и равным цене игры v независимо от того как игрок "А" использует свои активные стратегии. Поэтому если предположить, что игрок "А" будет пользоваться чистой стратегией A_1, то средний выигрыш v составит:

$$k_{11}q_1 + k_{12}q_2 = v \qquad (3)$$

Так как цена игры уже известна учитывая то, что $q_1 + q_2 = 1$, то оптимальную частоту стратегии B_1 найдём так:

$$q_1 = \frac{v - k_{12}}{k_{11} - k_{12}} = \frac{\frac{1}{5} - 3}{-4-3} = \frac{2}{5}.$$

Вероятность q_2 найдём вычитанием q_1 из единицы: $q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

<u>**Ответ:**</u> нижняя цена игры: $\alpha = -4$, верхняя цена игры: $\beta = 3$, цена игры $v = 1/5$,

оптимальная стратегия игрока А: $S_A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{13}{20} & \frac{7}{20} \end{vmatrix}$,

оптимальная стратегия игрока В: $S_B = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix}$.

Игроку А эта игра выгоднее.