МГАПИ

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Задание на домашнюю контрольную работу

Раздел «Дифференциальные уравнения»

Вариант 6

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y'=\frac{y^2+4}{x^2+1}$.

Решение. Разделяем переменные:

$$y'=\frac{y^2+4}{x^2+1},$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+4}{x^2+1},$$
$$\frac{dy}{y^2+4}=\frac{dx}{x^2+1}.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{dy}{y^2+4}=\int\frac{dx}{x^2+1},$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}=\operatorname{arctg}x+C,$$
$$\operatorname{arctg}\frac{y}{2}-2\operatorname{arctg}x=2C.$$

Получили общий интеграл: $\operatorname{arctg}\frac{y}{2}-2\operatorname{arctg}x=2C$.

Задача 3. Найти решение дифференциального уравнения $y'-2xy=e^{x^2}\cos x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение. Сначала найдем решение соответствующего однородного уравнения, разделяя переменные и интегрируя:

$$y'-2xy=0,$$
$$\frac{dy}{dx}=2xy,$$
$$\frac{dy}{y}=2xdx,$$
$$\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx,$$
$$\ln|y|=x^2+\ln C,$$
$$y=Ce^{x^2}.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде: $y=C(x)e^{x^2}$.

Производная: $y'=C'(x)e^{x^2}+2xC(x)e^{x^2}$.

Подставляем:

$$C'(x)e^{x^2}+2xC(x)e^{x^2}-2xC(x)e^{x^2}=e^{x^2}\cos x,$$
$$C'(x)e^{x^2}=\cos xe^{x^2},$$
$$C'(x)=\cos x,$$
$$C(x)=\int\cos xdx=\sin x+A.$$

Общее решение: $y=(\sin x+A)e^{x^2}$, где A - произвольная постоянная.

Найдем постоянную A из начального условия $y(0)=1$:

$$y(0)=(\sin 0+A)e^0=1,\ \Rightarrow A=1.$$

Искомое решение $y(x)=(\sin x+1)e^{x^2}$.

Задача 4. Найти решение дифференциального уравнения $y'+2y=\frac{3}{2}e^{-x}y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Решение ищем в виде произведения двух функций: $y=uv$, $y'=u'v+uv'$. Получаем:

$$(u'v+uv')+2uv=\frac{3}{2}e^{-x}u^2v^2,$$

$$u'v+uv'+2uv=\frac{3}{2}e^{-x}u^2v^2,$$

$$u'v+u(v'+2v)=\frac{3}{2}e^{-x}u^2v^2. \text{ (*)}$$

Выбираем функцию v как частное решение следующего уравнения:

$$v'+2v=0,$$
$$\frac{dv}{dx}=-2v,$$
$$\frac{dv}{v}=-2dx,$$
$$\int\frac{dv}{v}=-2\int dx,$$
$$\ln|v|=-2x,$$
$$v=e^{-2x}.$$

Подставляем найденную функцию $v=e^{-2x}$ в уравнение (*), получаем:

$$u'e^{-2x}=\frac{3}{2}e^{-x}u^2\left(e^{-2x}\right)^2,$$
$$u'=\frac{3}{2}e^{-3x}u^2,$$
$$\frac{du}{dx}=\frac{3}{2}e^{-3x}u^2,$$
$$\frac{du}{u^2}=\frac{3}{2}e^{-3x}dx.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{du}{u^2}=\frac{3}{2}\int e^{-3x}dx,$$
$$-\frac{1}{u}=-\frac{1}{2}e^{-3x}-C,$$
$$u=\frac{1}{\frac{1}{2}e^{-3x}+C},$$
$$u=\frac{2}{e^{-3x}+2C}.$$

Тогда общее решение равно: $y=uv=\frac{2e^{-2x}}{e^{-3x}+2C}$. Найдем постоянную C из начального условия $y(0)=2$. Получаем:

$$y(0)=\frac{2e^0}{e^0+2C}=2,\Rightarrow C=0.$$

Решение задачи Коши: $y=\frac{2e^{-2x}}{e^{-3x}}=\frac{2}{e^{-x}}.$

Задача 5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+\frac{y'}{x}=9x$.

Решение. Так как в уравнение явно не входит функция y, делаем замену: $z=y'$, тогда $z'=y''$. Приходим к уравнению:

$$z'+\frac{z}{x}=9x.$$

Это линейное неоднородное уравнение первого порядка.

Сначала решаем соответствующее однородное уравнение:

$$z'+\frac{z}{x}=0,$$
$$\frac{dz}{dx}=-\frac{z}{x},$$
$$\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x},$$

Интегрируем

$$\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dx}{x},$$
$$\ln|z|=-\ln|x|+\ln|C|,$$
$$z=\frac{C}{x}.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде $z=\frac{C(x)}{x}$. Производная $z=\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}$. Подставляем:

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=9x,$$
$$C'(x)=9x^2,$$
$$C(x)=\int 9x^2dx=3x^3+C_1.$$

Получаем решение $z=\frac{3x^3+C_1}{x}=3x^2+\frac{C_1}{x}$.

Возвращаемся к функции y, получаем уравнение: $y'=3x^2+\frac{C_1}{x}$. Интегрируем:

$$y=\int\left(3x^2+\frac{C_1}{x}\right)dx=x^3+C_1\ln|x|+C_2.$$

Нашли общее решение: $y(x)=x^3+C_1\ln|x|+C_2$.

Задача 6. Найти решение дифференциального уравнения $y''=6y^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(2)=\frac{1}{4}$, $y'(2)=-\frac{1}{4}$.

Решение. Так как уравнение не содержит в явном виде переменной x, делаем замену $y'=p=p(y)$, $y''=p'p$. Подставляем:

$$p'p=6y^2,$$
$$\frac{dp}{dy}p=6y^2,$$
$$pdp=6y^2dy,$$
$$\int pdp=\int 6y^2dy,$$
$$\frac{1}{2}p^2=2y^3+C_1,$$
$$p^2=4y^3+2C_1,$$
$$p=\pm\sqrt{4y^3+2C_1}.$$

Получили $y'=\pm\sqrt{4y^3+2C_1}$. Найдем постоянную C_1 и знак перед корнем из начального условия $y(2)=\frac{1}{4}$, $y'(2)=-\frac{1}{4}$.

$$-\frac{1}{4}=-\sqrt{4\frac{1}{64}+2C_1},$$
$$\frac{1}{16}=\frac{1}{16}+2C_1,$$
$$C_1=0.$$

Значит, $y'=-\sqrt{4y^3}=-2y^{3/2}$.

Интегрируем полученное уравнение:

$$y'=-2y^{3/2},$$
$$y^{-3/2}dy=-2dx,$$
$$\int y^{-3/2}dy=-2\int dx,$$
$$-2y^{-1/2}=-2x-2C_2,$$
$$\frac{1}{\sqrt{y}}=x+C_2,$$
$$y=\frac{1}{(x+C_2)^2}.$$

Найдем постоянную C_2 из начального условия $y(2)=\frac{1}{4}$:

$$y(2)=\frac{1}{(2+C_2)^2}=\frac{1}{4}, \Rightarrow C_2=0.$$

Искомое решение: $y(x)=\frac{1}{x^2}$.

Задача 9. Найти решение дифференциального уравнения $y''+8y'+7y=(27x+12)e^{2x}-6e^{-7x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\ y'(0)=0$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Сначала решим соответствующее однородное уравнение $y''+2y'=0$. Составляем соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2+8k+7=0,$$
$$D=64-28=36$$
$$k_{1,2}=\frac{-8\pm 6}{2}=-7,\ -1.$$

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{o.o.}(x)=C_1e^{-7x}+C_2e^{-x}$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части.

1) $f_1=(27x+12)e^{2x}$. Будем искать его в виде $y_1=(Ax+B)e^{2x}$. Умножили на x, так как $k=-2$ - корень характеристического уравнения. Найдем производные:

$$y_1'=(A+2Ax+2B)e^{2x},$$

$$y_1''=(2A+2A+4Ax+4B)e^{2x}=(4A+4Ax+4B)e^{2x}..$$

Подставляем в уравнение:

$$(4A+4Ax+4B)e^{2x}+8(A+2Ax+2B)e^{2x}+7(Ax+B)e^{2x}=(27x+12)e^{2x},$$
$$4A+4Ax+4B+8A+16Ax+16B+7Ax+7B=(27x+12),$$
$$x(4A+16A+7A)+(4A+4B+8A+16B+7B)=27x+12,$$
$$27Ax+(12A+27B)=27x+12.$$

Приравниваем коэффициенты при степенях x справа и слева:

$$\begin{cases} 27A = 27, \\ 12A + 27B = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1, \\ B = 0. \end{cases}$$

Получили $y_1 = xe^{2x}$.

2) $f_2 = -6e^{-7x}$. Будем искать его в виде $y_2 = Axe^{-7x}$. Умножили на x, так как $k = -7$ - корень характеристического уравнения. Найдем производные:

$$y_2' = (A - 7Ax)e^{-7x}, \quad y_2'' = (-7A - 7A + 49Ax)e^{-7x} = (-14A + 49Ax)e^{-7x}.$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} &(-14A + 49Ax)e^{-7x} + 8(A - 7Ax)e^{-7x} + 7Axe^{-7x} = -6e^{-7x}, \\ &-14A + 49Ax + 8A - 56Ax + 7Ax = -6, \\ &-6A = -6, \\ &A = 1. \end{aligned}$$

,

Получили $y_2 = xe^{-7x}$

Тогда общее решение исходного неоднородного уравнения равно:

$$y_{o.н.}(x) = y_{o.o.} + y_1 + y_2 = C_1e^{-7x} + C_2e^{-x} + xe^{2x} + xe^{-7x}.$$

Найдем постоянные C_1, C_2 из начальных условий: $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. Вычислим производную решения:

$$y_{о.н.}'(x) = \left(C_1e^{-7x} + C_2e^{-x} + xe^{2x} + xe^{-7x}\right)' =$$
$$= -7C_1e^{-7x} - C_2e^{-x} + e^{2x} + e^{-7x} + 2xe^{2x} - 7xe^{-7x}.$$

Подставляем:

$$\begin{cases} y_{о.н.}(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ y_{о.н.}'(0) = -7C_1 - C_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 7C_1 + C_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}, \\ C_2 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Подставляем:

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{-7x} - \frac{1}{3}e^{-x} + xe^{2x} + xe^{-7x}.$$

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения
$y'' + 5y' + 4y = 20\sin 2x + 30\cos 2x$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение второго порядка. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + 5y' + 4y = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2+5k+4=0,$$
$$D=25-4\cdot 4=9,$$
$$k_{1,2}=\frac{-5\pm 3}{2}=-4,\ -1.$$

Получаем $y_{o.o.}=C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части:

$y_{ч.н.}=A\sin 2x+B\cos 2x$.

Находим производные:

$$y_{ч.н.}'=2A\cos 2x-2B\sin 2x$$

$$y_{ч.н.}''=-4A\sin 2x-4B\cos 2x.$$

Подставляем:

$$-4A\sin 2x-4B\cos 2x+5\left(2A\cos 2x-2B\sin 2x\right)+4\left(A\sin 2x+B\cos 2x\right)=20\sin 2x+30\cos 2x,$$

$$-4A\sin 2x-4B\cos 2x+10A\cos 2x-10B\sin 2x+4A\sin 2x+4B\cos 2x=20\sin 2x+30\cos 2x,$$
$$\left(-4A-10B+4A\right)\sin 2x+\left(-4B+10A+4B\right)\cos 2x=20\sin 2x+30\cos 2x,$$
$$-10B\sin 2x+10A\cos 2x=20\sin 2x+30\cos 2x,$$
$$B=-2,\ A=3.$$

$y_{ч.н.}=3\sin 2x-2\cos 2x$.

Искомое решение:

$$y_{о.н.}=y_{o.o.}+y_{ч.н.}=C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}+3\sin 2x-2\cos 2x.$$

Задача 11. Найти общее решение дифференциального уравнения
$y'''-3y''+3y'-y=x^3-9x^2+18x-6$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение третьего порядка. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $y'''-3y''+3y'-y=0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^3-3k^2+3k-1=0,$$
$$(k-1)^3=0$$
$$k_{1,2,3}=1.$$

Получаем $y_{o.o.}=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части.

$f=x^3-9x^2+18x-6$. Частное решение ищем в виде $y_{ч.н.}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$.

Находим производные: $y_{ч.н.}'=3Ax^2+2Bx+C$, $y_{ч.н.}''=6Ax+2B$, $y_{ч.н.}'''=6A$

Подставляем:

$$6A-3(6Ax+2B)+3(3Ax^2+2Bx+C)-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=x^3-9x^2+18x-6,$$

$$6A-18Ax-6B+9Ax^2+6Bx+3C-Ax^3-Bx^2-Cx-D=x^3-9x^2+18x-6,$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x справа и слева:

$$\begin{cases}-A=1,\\ 9A-B=-9,\\ -18A+6B-C=18,\\ 6A-6B+3C-D=-6.\end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = 0. \end{cases}$$

То есть: $y_{ч.н.} = -x^3$

Тогда общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x - x^3.$$

Задача 12. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1,\ y(0) = 1$.

Решение. Запишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = 3x - 4y. \end{cases}$$

Дифференцируем первое уравнение по t, получаем:

$$x'' = 2x' - 3y'.$$

Подставляем из второго уравнения y':

$$x''=2x'-3(3x-4y),$$
$$x''=2x'-9x+12y.$$

Из первого уравнения выражаем $3y=2x-x'$ и подставляем:

$$x''=2x'-9x+4(2x-x'),$$
$$x''-2x'+9x-8x+4x'=0,$$
$$x''+2x'+x=0.$$

Решаем получившееся уравнение. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2+2k+1=0,$$
$$(k+1)^2=1,$$
$$k_{1,2}=-1.$$

Получаем $x(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$.

Подставляем в $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x'$, чтобы найти вторую неизвестную функцию:

$$y=\frac{2}{3}\left(C_1e^{-t}+C_2te^{-t}\right)-\frac{1}{3}\left(C_1e^{-t}+C_2te^{-t}\right)'=\frac{1}{3}\left[2C_1e^{-t}+2C_2te^{-t}+C_1e^{-t}-C_2e^{-t}+C_2te^{-t}\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\left[3C_1e^{-t}+3C_2te^{-t}-C_2e^{-t}\right]=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}-\frac{1}{3}C_2e^{-t}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}, \\ y(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}-\frac{1}{3}C_2e^{-t}. \end{cases}$$

Найдем неизвестные постоянные из начальных условий: $x(0)=y(0)=1$.

$$\begin{cases} x(t) = C_1 = 1, \\ y(t) = C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем нужное решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}, \\ y(t) = e^{-t}. \end{cases}$$