Математический анализ. Контрольная работа

Дифференциальное исчисление

Задание 1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x^3+8}{2x^5-3x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^5}}{2-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^5}}=\frac{6}{2}=3;$$

2)
$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{2x-2}+4)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{2x-2}-4)(\sqrt{2x-2}+4)}=$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(\sqrt{2x-2}+4)}{(\sqrt{x}+3)(2x-2-16)}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(\sqrt{2x-2}+4)}{(\sqrt{x}+3)(2x-18)}=$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(\sqrt{2x-2}+4)}{2(\sqrt{x}+3)(x-9)}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x-2}+4}{2(\sqrt{x}+3)}=\frac{\sqrt{2\cdot 9-2}+4}{2(\sqrt{9}+3)}=\frac{\sqrt{16}+4}{2(3+3)}=$$
$$=\frac{4+4}{2\cdot 6}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{5x}=\begin{bmatrix} x\to 0 \\ \arcsin 2x\sim 2x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

4)
$$\lim_{x\to-\infty}(2-3x)\ln\frac{1-3x}{2-3x}=[t=-x]=\lim_{t\to+\infty}(2+3t)\ln\frac{1+3t}{2+3t}=$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{1+3t}{2+3t}\right)^{2+3t}=\ln\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2+3t-1}{2+3t}\right)^{2+3t}=\ln\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{2+3t}\right)^{(2+3t)}=$$
$$=\ln\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(2+3t)}\right)^{-(-(2+3t))}=-\ln\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(2+3t)}\right)^{-(2+3t)}=-\ln e=-1$$

Задание 2. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\le 0;\\ 2, & 0<x\le 2;\\ x, & x>2.\end{cases}$$

Решение.

Функция состоит из трех непрерывных функций. Она может быть разрывной только в точках $x = 0$ и $x = 2$.
Найдем односторонние пределы функции в этих точках.
В точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \sqrt{-x} = \sqrt{-(-0)} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} 2 = 2$$

$$f(0) = \sqrt{-0} = 0$$

Пределы слева и справа существуют, но они различны.
В точке $x = 0$ функция имеет разрыв I рода (скачок).

В точке $x = 2$:

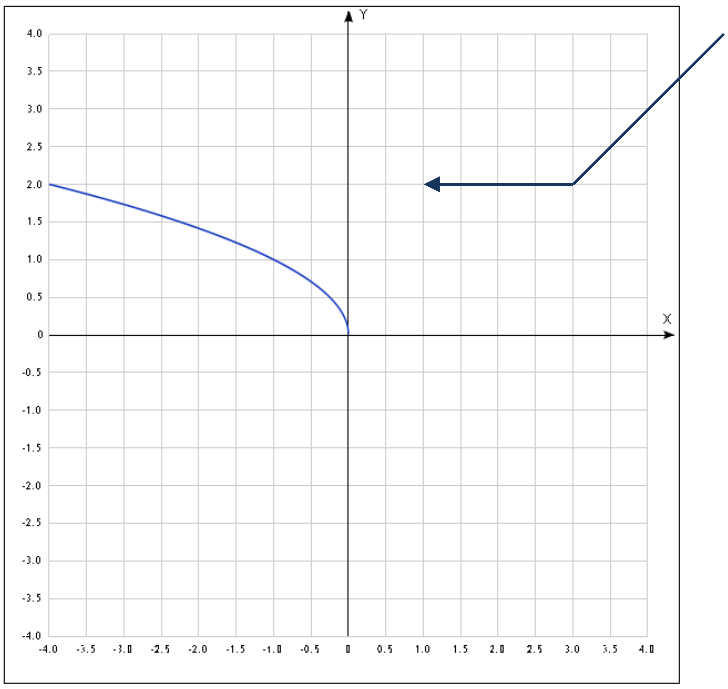
$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} x = 2$$

$$f(x) = f(2) = 2$$

Пределы слева и справа в точке $x = 2$ существуют и равны значению функции в этой точке.
Следовательно, в точке $x = 2$ функция непрерывна.

Сделаем чертеж.



Задание 3. Найти производные первого порядка данных функций.

1) $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$

Решение.

$$y=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}=\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'\left(x-\sqrt{x}\right)-\left(x+\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)'}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)-\left(x+\sqrt{x}\right)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x-\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\left(x+\sqrt{x}-\frac{x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x-\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-x-\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\sqrt{x}+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\sqrt{x}\right)^2\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-\sqrt{x}}{2\left(x-\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{-\sqrt{x}}{2\left(x-\sqrt{x}\right)\sqrt{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}}=\frac{-\sqrt{x}}{2\left(x-\sqrt{x}\right)\sqrt{x^2-x}}$$

2) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Решение.

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2} - \arcsin x \cdot \frac{\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-\arcsin x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1+\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}+x\cdot\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

3) $y=(\sin 3x)^x$

Решение.

$\ln y = \ln(\sin 3x)^x$

$\ln y = x\ln(\sin 3x)$

$(\ln y)' = (x\ln(\sin 3x))'$

$\frac{y'}{y} = x'\ln(\sin 3x) + x(\ln(\sin 3x))'$

$\frac{y'}{y} = \ln(\sin 3x) + x\cdot\frac{(\sin 3x)'}{\sin 3x}$

$\frac{y'}{y} = \ln(\sin 3x) + x\cdot\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}$

$\frac{y'}{y} = \ln(\sin 3x) + 3x\cdot ctg\, 3x$

$y' = y\cdot(\ln(\sin 3x)+3x\cdot ctg\,3x) = (\sin 3x)^x\cdot(\ln(\sin 3x)+3x\cdot ctg\,3x)$

4) $\ln\frac{x}{y} - x + 2y = 0$

Решение.

$\ln\frac{x}{y} = x-2y$

$\ln x - \ln y = x - 2y$

$(\ln x - \ln y)' = (x-2y)'$

$\frac{1}{x} - \frac{y'}{y} = 1-2y'$

$2y' - \frac{y'}{y} = 1 - \frac{1}{x}$

$y'\left(2-\frac{1}{y}\right) = 1-\frac{1}{x}$

$y'\cdot\frac{2y-1}{y} = \frac{x-1}{x}$

$y' = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{y}{2y-1} = \frac{y(x-1)}{x(2y-1)}$

Задание 4. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций:

1) $y = f(x)$; 2) $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$.

$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
$\frac{\ln x}{x^2}$	e^{-2t}	e^{4t}

Решение.

1) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{(\ln x)' x^2 - \ln x \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} =$$

$$= \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-2\ln x)' x^3 - (1-2\ln x)(x^3)'}{x^6} = \frac{\frac{2}{x}\cdot x^3 - (1-2\ln x)\cdot 2x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{2x^2 - (1-2\ln x)\cdot 2x^2}{x^6} = \frac{2x^2(1-1+2\ln x)}{x^6} = \frac{2\cdot 2\ln x}{x^4} = \frac{4\ln x}{x^4}$$

2) $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$

$x = \varphi(t) = e^{-2t}$

$y = \psi(t) = e^{4t}$

$$\frac{dy}{dt} = 4e^{4t}$$

$$\frac{dx}{dt} = -2e^{-2t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4e^{4t}}{-2e^{-2t}} = -2e^{6t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(dy/dx)'_t}{dx/dt} = \frac{-12e^{6t}}{-2e^{-2t}} = 6e^{8t}$$

Приложения дифференциального исчисления

Задание 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

$f(x)$	$[a;b]$
$2\sqrt{x} - x$	$[0;4]$

Решение.

$f(x) = 2\sqrt{x} - x$

Функция непрерывна на всей области определения.

Найдем производную функции.

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$

$1 - \sqrt{x} = 0$

$x \neq 0$

$\sqrt{x} = 1$

$x = 1$

Получили критическую точку. Она принадлежит заданному отрезку.

Найдем значения функции в этой точке и на концах отрезка.

$f(1) = 2\sqrt{1} - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(0) = 2\sqrt{0} - 0 = 0 - 0 = 0$

$f(4) = 2\sqrt{4} - 4 = 2 - 4 = -2$

Сравним полученные значения.

$f_{\max} = f(1) = 1$

$f_{\min} = f(4) = -2$

Задание 6. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

$f(x)$	$f(x)$
$\frac{1-2x}{x^2 - x - 2}$	$x e^{2x-1}$

1) $f(x) = \frac{1-2x}{x^2 - x - 2}$

Решение.

Найдем область определения функции.

$$x^2 - x - 2 \neq 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$$x \neq -1,\ x \neq 2$$

Данная функция определена и непрерывна на промежутках $(-\infty;-1) \cup (-1;2) \cup (2;+\infty)$.

Функция имеет бесконечные разрывы в точках $x = -1,\ x = 2$.

Это уравнения вертикальных асимптот.

$$f(-x) = \frac{1 - 2\cdot(-x)}{(-x)^2 + x - 2} = \frac{1+2x}{x^2 + x - 2} \neq f(x) \neq -f(x)$$

Функция не является ни четной, ни нечетной.

Функция не является периодической.

Найдем точки пересечения функции с осями координат.

$$f(0) = \frac{1 - 2\cdot 0}{0^2 - 0 - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = 0 \text{ при } \frac{1-2x}{x^2 - x - 2} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Функция пересекает оси координат в точках $\left(0;-\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2};0\right)$

Выясним, имеет ли функция наклонные асимптоты $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x}{x(x^2 - x - 2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{x^2 - x - 2} - 0\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой.

Исследуем функцию на экстремумы, найдем промежутки возрастания и убывания.

Вычислим производную:

$$f'(x)=\frac{(1-2x)'(x^2-x-2)-(1-2x)(x^2-x-2)'}{(x^2-x-2)^2}=$$

$$=\frac{-2(x^2-x-2)-(1-2x)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}=$$

$$=\frac{-2x^2+2x+4-(2x-1-4x^2+2x)}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-2x^2+2x+4-4x+1+4x^2}{(x^2-x-2)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}=[D=4-40=-36<0]$$

$f'(x)\neq 0$

$x\neq -1,\ x\neq 2$

Функция не имеет точек экстремума.
Построим интервалы монотонности.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	Не сущ.	+	Не сущ.	+
y	↗	Не сущ.	↗	Не сущ.	↗

Функция возрастает на промежутках $(-\infty;-1)\ (-1;2)\ (2;+\infty)$

Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.
Найдем вторую производную:

$$f''(x)=\frac{(2x^2-2x+5)'(x^2-x-2)^2-(2x^2-2x+5)((x^2-x-2)^2)'}{(x^2-x-2)^4}=$$

$$=\frac{(4x-2)(x^2-x-2)^2-(2x^2-2x+5)\cdot 2(x^2-x-2)(2x-1)}{(x^2-x-2)^4}=$$

$$=\frac{(4x-2)(x^2-x-2)(x^2-x-2-(2x^2-2x+5))}{(x^2-x-2)^4}=$$

$$=\frac{(4x-2)(x^2-x-2-2x^2+2x-5)}{(x^2-x-2)^3}=\frac{(4x-2)(-x^2+x-7)}{(x^2-x-2)^3}=$$

$$=\frac{-2(2x-1)(x^2-x+7)}{(x^2-x-2)^3}$$

$f''(x)=0$

$x=\frac{1}{2}$

Получили точку перегиба.

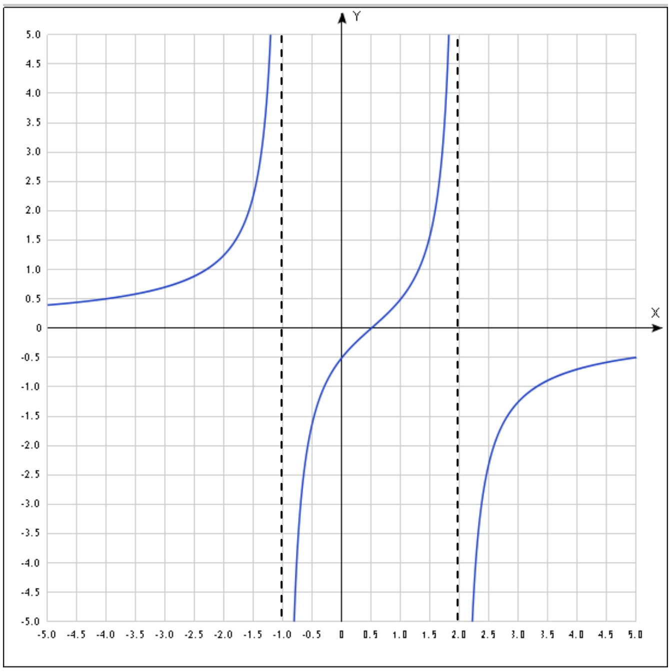
$x\neq -1,\ x\neq 2$

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$\left(-1;\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};2\right)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	Не сущ.	–	0	+	Не сущ.	–
y	$\cup$	Не сущ.	$\cap$	0	$\cup$	Не сущ.	$\cap$

Следовательно, в интервалах $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ $(2;+\infty)$ график функции выпуклый, а в интервалах $(-\infty;-1)$ $\left(-\frac{1}{2};2\right)$– вогнутый.

Построим график исследуемой функции.



2) $f(x) = x e^{2x-1}$

Решение.

Найдем область определения функции.

$D(f) = (-\infty;+\infty)$

Данная функция определена и непрерывна на всей числовлй прямой.

$x = -1,\ x = 2$.

Вертикальных асимптот нет.

$f(-x)=-x\,e^{-2x-1}\neq f(x)\neq -f(x)$

Функция не является ни четной, ни нечетной.
Функция не является периодической.
Найдем точки пересечения функции с осями координат.

$f(0)=0\,e^{2\cdot 0-1}=0$

$f(x)=0$ при $x\,e^{2x-1}=0$

$x=0$

Функция пересекает оси координат в точке (0; 0)

Выясним, имеет ли функция наклонные асимптоты $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\,e^{2x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty} e^{2x-1}=\infty$$

Следовательно, наклонных асимптот нет.
Исследуем функцию на экстремумы, найдем промежутки возрастания и убывания.

Вычислим производную:

$$f'(x)=x'e^{2x-1}+x(e^{2x-1})'=e^{2x-1}+2x\,e^{2x-1}=e^{2x-1}(1+2x)$$

$f'(x)=0$

$x=-\dfrac{1}{2}$

Получили точку экстремума.
Построим интервалы монотонности.

x	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$
y'	+	Не сущ.	+
y	↗	Не сущ.	↗

Функция возрастает на промежутках $(-\infty;-1)\,(-1;2)\,(2;+\infty)$

Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.
Найдем вторую производную:

$$f'(x)=(e^{2x-1})'(1+2x)+e^{2x-1}(1+2x)'=2\,e^{2x-1}(1+2x)+2\,e^{2x-1}=$$
$$=2\,e^{2x-1}(1+2x+1)=2\,e^{2x-1}(2x+2)=4\,e^{2x-1}(x+1)$$

$f''(x) = 0$

$x = -1$

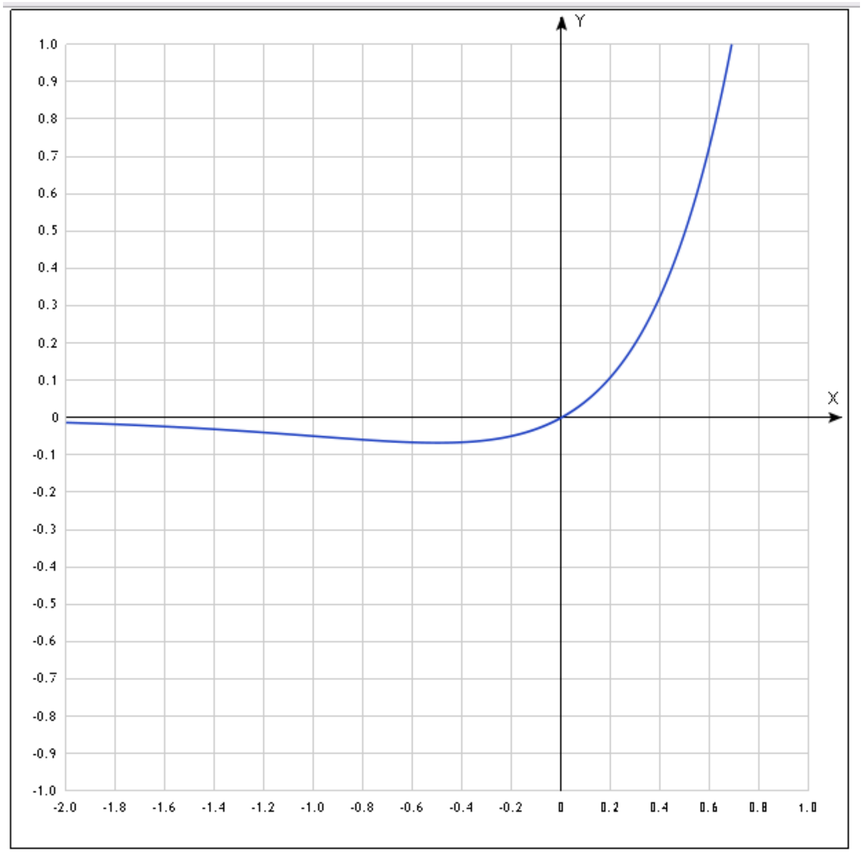
Получили точку перегиба.

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$

Следовательно, в интервале $(-\infty;-1)$ график функции выпуклый, а в интервале $(-1;+\infty)$– вогнутый.

Построим график исследуемой функции.



Интегральное исчисление

Задание 7. Найти неопределенные интегралы. В п. 1) и 2) результаты проверить дифференцированием.

1)

$$\int \frac{\sin 2x dx}{3\sin^2 x + 4} = \int \frac{2\sin x \cos x\, dx}{3\sin^2 x + 4} = \begin{bmatrix} \sin^2 x = t \\ dt = 2\sin x \cos x\, dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{3t+4} = ;$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(3t+4)}{3t+4} = \frac{1}{3}\ln(3t+4) + C = \frac{1}{3}\ln(3\sin^2 x + 4) + C$$

2)

$$\int x^2 \cos 6x\, dx = \begin{bmatrix} \int u dv = uv - \int v du \\ u = x^2;\ du = 2x dx \\ dv = \cos 6x\, dx \\ v = \frac{1}{6}\sin 6x \end{bmatrix} = \frac{1}{6}x^2 \sin 6x - \frac{1}{3}\int x \sin 6x\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x;\ du = dx \\ dv = \sin 6x\, dx \\ v = -\frac{1}{6}\cos 6x \end{bmatrix} = \frac{1}{6}x^2 \sin 6x - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}x\cos 6x + \frac{1}{6}\int \cos 6x\, dx\right) = ;$$

$$= \frac{1}{6}x^2 \sin 6x - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}x\cos 6x + \frac{1}{36}\sin 6x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{6}x^2 \sin 6x + \frac{1}{18}x\cos 6x - \frac{1}{108}\sin 6x + C$$

3)

$$\int \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - 6x} dx;$$

Разложим дробь на сумму простейших дробей.

$$\frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x}=\frac{2x^2-x-1}{x(x^2-x-6)}=\frac{2x^2-x-1}{x(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}=$$
$$=\frac{A(x+2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-3)}=$$
$$=\frac{A(x^2-3x+2x-6)+Bx^2-3Bx+Cx^2+2Cx}{x(x+2)(x-3)}=$$
$$=\frac{Ax^2-Ax-6A+Bx^2-3Bx+Cx^2+2Cx}{x(x+2)(x-3)}=$$
$$=\frac{x^2(A+B+C)+x(-A-3B+2C)-6A}{x(x+2)(x-3)}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\begin{cases}A+B+C=2\\-A-3B+2C=-1\\-6A=-1\end{cases}$$
$$\begin{cases}\frac{1}{6}+B+C=2\\-\frac{1}{6}-3B+2C=-1\\A=\frac{1}{6}\end{cases}$$
$$\begin{cases}C=\frac{11}{6}-B\\-3B+2C=-1+\frac{1}{6}\\A=\frac{1}{6}\end{cases}$$
$$\begin{cases}C=\frac{11}{6}-B\\-3B+2\left(\frac{11}{6}-B\right)=-\frac{5}{6}\\A=\frac{1}{6}\end{cases}$$
$$\begin{cases}C=\frac{11}{6}-B\\-3B+\frac{22}{6}-2B=-\frac{5}{6}\\A=\frac{1}{6}\end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \frac{11}{6} - B \\ -5B = -\frac{22}{6} - \frac{5}{6} \\ A = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \frac{11}{6} - B \\ -5B = -\frac{27}{6} \\ A = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \frac{11}{6} - \frac{9}{10} \\ B = \frac{27}{30} = \frac{9}{10} \\ A = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = \frac{9}{10} \\ C = \frac{55}{30} - \frac{27}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15} \end{cases}$$

Подставим значения и выполним проверку.

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} = \frac{1}{6x} + \frac{9}{10(x+2)} + \frac{14}{15(x-3)} =$$

$$= \frac{5(x+2)(x-3) + 27x(x-3) + 28x(x+2)}{30x(x+2)(x-3)} =$$

$$= \frac{5(x^2 - 3x + 2x - 6) + 27x^2 - 81x + 28x^2 + 56x}{30x(x+2)(x-3)} =$$

$$= \frac{5x^2 - 5x - 30 + 27x^2 - 25x + 28x^2}{30x(x+2)(x-3)} = \frac{60x^2 - 30x - 30}{30x(x+2)(x-3)} = \frac{30(2x^2 - x - 1)}{30x(x+2)(x-3)} =$$

$$= \frac{2x^2 - x - 1}{x(x+2)(x-3)}$$

Разложение верное.

Подставим в интеграл.

$$\int \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - 6x} dx = \int \left(\frac{1}{6x} + \frac{9}{10(x+2)} + \frac{14}{15(x-3)} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6} \ln x + \frac{9}{10} \ln(x+2) + \frac{14}{15} \ln(x-3) + C$$

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}} = t \\ dt = \frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1}dx = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}dx = \frac{dx}{6x^{\frac{5}{6}}} \\ dx = 6x^{\frac{5}{6}}dt = 6t^5dt \end{array}\right] = \int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)} \cdot 6t^5dt =$$

4)

$$= \int \frac{t(t^5+t^3+1)}{t^6(1+t^2)} \cdot 6t^5dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^3(t^2+1)+1}{t^2+1}dt = 6\int\left(t^3+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^4}{4}+arctg\,t\right)+C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^4}}{4}+arctg\sqrt[6]{x}\right)+C = 6\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+arctg\sqrt[6]{x}\right)+C$$

Задание 8. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Решение.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+2x+4+1} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} arctg(x+2)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\big(arctg(b+2) - arctg(0+2)\big) = .$$

$$= arctg(\infty) - arctg 2 = \frac{\pi}{2} - 1{,}107 = 1{,}571 - 1{,}107 = 0{,}464$$

Задание 9. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры Ω вокруг указанной оси координат.

$y = 3\sqrt{1-x^2}$, $x = \sqrt{1-y}$; Ox .

Решение.

$$y = 3\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{y}{3} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{y^2}{9} = 1 - x^2 \; (y>0)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

Это часть эллипса над осью Ox.

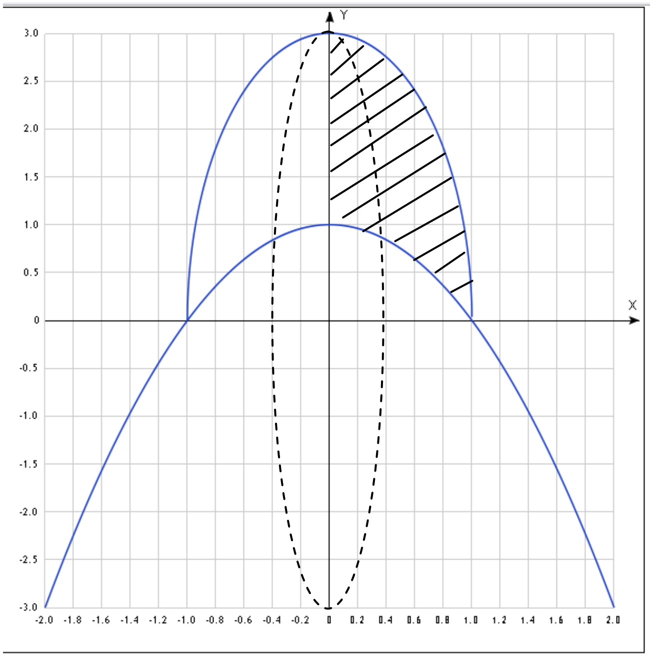
$$x = \sqrt{1-y}$$

$$x^2 = 1 - y$$

$$y = -x^2 + 1 \; (x>0)$$

Это часть параболы правее оси Oy.

Построим данную фигуру.



Объем тела, образованного вращением данной фигуры, равен:

$$V_1=\pi\int_0^1\left(\left(3\sqrt{1-x^2}\right)^2-(-x^2+1)^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(9(1-x^2)-(1-x^2)^2\right)dx=$$

$$=\pi\int_0^1\left(9-9x^2-1+2x^2-x^4\right)dx=\pi\int_0^1\left(8-7x^2-x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left(8x-\frac{7x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(8-\frac{7}{3}-\frac{1}{5}\right)=\pi\cdot\frac{120-35-3}{15}=\pi\cdot\frac{82}{15}\approx 17{,}17(ед^3)$$

Ряды

Задание 10. Исследовать на сходимость ряды

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{5n+2}\right)^n$

Решение. Используем необходимый признак сходимости. Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{5n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2-2}{5n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{5n+2}\right)^n=\left(1^\infty\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{5n+2}\right)^{\frac{5n+2}{-2}}\right)^{\frac{-2}{5n+2}n}=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{-2}{5n+2}n}=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{-2}{5+2/n}}=e^{-2/5}\neq 0.$$

Необходимое условие сходимости не выполняется, ряд <u>расходится</u>.

Б) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$

Решение. Сравним данный ряд по предельному признаку сравнения со сходящимся рядом

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ (обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ с показателем $p=4>1$):

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right):\frac{1}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^4}}=\left|\grave{o}.\hat{e}.\ \ln(1+t)\to t,\ t\to 0\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}}=1\neq 0,\infty$$

Таким образом, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$ также сходится.

В) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$.

Решение. Рассмотрим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$. Он сходится или расходится также, как и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}:\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{1/(n+2)}=1.$$

Используем интегральный признак Коши. Рассмотрим соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$ от положительной убывающей функции $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$. Исследуем его сходимость.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\left|\int\frac{dy}{y}=\ln|y|\right|=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\ln|\ln(x+1)|\right)\Big|_1^A=\lim_{A\to\infty}\left(\ln|\ln(A+1)|-\ln|\ln(1+1)|\right)=\infty.$$

Интеграл расходится, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$ также расходится.

Рассмотрим исходный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$.

Этот знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, так как общий член $a_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}\to 0$ при $n\to\infty$ и монотонно убывает.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$ <u>сходится условно.</u>

Задание 11. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}$

Решение. Найдем радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}:\frac{1}{\sqrt[3]{n+1+1}\cdot\sqrt{(n+1)^2+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{n+1+1}\cdot\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{n+2}\cdot\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{n+2}{n+1}}\cdot\sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1+2/n}{1+1/n}}\cdot\sqrt{\frac{(1+1/n)^2+1/n^2}{1+1/n^2}}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{1}\cdot\sqrt{1}=1.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при

$|x-5|<1,$

$-1<x-5<1,$

$4<x<6,$

$x\in(4;6)$

Исследуем сходимость на концах интервала.

Пусть $x=6$, получаем ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6-5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}$. Сравним данный ряд по предельному признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ (обобщенный гармонический с показателем $p=4/3>1$):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}:\frac{1}{n^{4/3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{4/3}}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+1/n}\cdot\sqrt{1+1/n^2}}=1\neq 0,\infty.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}$ сходится.

Пусть $x=4$, получаем ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4-5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}$. Так как ряд из модулей $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}$ сходится (см. выше), то этот ряд сходится абсолютно.

Таким образом, область сходимости ряда: $x\in[4;6]$.

Задание 12. Вычислить $e^{-0,3}$ с точностью до 0,001.

Решение. Используем известное разложение (формулу Тейлора) с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\ldots+\frac{1}{n!}\exp(\theta x)x^n+\ldots,\ 0<\theta<1.$$

Получаем:

$$a=e^{-0,3}=$$

$$=1+(-0,3)+\frac{1}{2}(-0,3)^2+\frac{1}{6}(-0,3)^3+\frac{1}{24}(-0,3)^4+\frac{1}{120}(-0,3)^5+\ldots=$$

$$=1-0,3+0,045-0,0045+0,0003-\ldots\approx 1-0,3+0,045-0,0045=0,741.$$

Погрешность не превосходит первого отброшенного члена $0,0003<0,001$.