Контрольная работа по математическому анализу

Задание 1. Найти пределы функций в точке x_0, используя свойства пределов, замечательные пределы и сравнение бесконечно малых.

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos^4 x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos^2 x)}{x^2}=\left|\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-1+\frac{x^2}{2})(1+\cos x)(1+\cos^2 x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1+\cos x)(1+\cos^2 x)}{2}=$$

$$=\frac{1*(1+1)*(1+1)}{2}=2$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1+\arcsin 2x^2}-1\right)\ln(1+tg3x)}{(1-\cos 4x)(5^{4x}-1)}$$

Применим эквивалентности

$$\arcsin x\sim x,\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2},tgx\sim x,a^x\sim 1+x\ln a$$

Тогда, получаем,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1+\arcsin 2x^2}-1\right)\ln(1+tg3x)}{(1-\cos 4x)(5^{4x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1+2x^2}-1\right)\ln(1+3x)}{(1-\left(1-\frac{(4x)^2}{2}\right))(1+4x\ln 5-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1+2x^2}-1\right)\ln(1+3x)}{32x^3\ln 5}$$

Применим эквивалентности

$$\sqrt[n]{1+x}\sim 1+\frac{x}{n},\ln(1+x)\sim x$$

Тогда, получаем,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1+2x^2}-1\right)\ln(1+3x)}{32x^3\ln 5}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{2x^2}{4}-1\right)*3x}{32x^3\ln 5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^3}{32x^3\ln 5}=\frac{3}{64\ln 5}$$

Задание 2. Найти и изобразить область определения функции $z=\sqrt{\dfrac{xy}{(x+y)}}$

Решение. Запишем область определения функции:

$$\frac{xy}{(x+y)} \ge 0$$

$$\begin{cases} xy \ge 0 \\ x+y>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xy \le 0 \\ x+y<0 \end{cases}$$

Решим графически.

Первая система:

$$\begin{cases} xy \ge 0 \\ x+y>0 \end{cases}$$

$xy \ge 0$

тогда, когда они одного знака или равны нулю. Это может быть в I и III четверти.

$x+y>0$

$y>-x$

Чертим прямую $y=-x$ и находим ту полуплскость, где соблюдается неравенство. Подставим точку (2;1)

$2>-1$

Эта точка подходит. Решение неравенства находится выше прямой $y=-x$.

Решение первой системы – I координатная четверть.

Вторая система:

$$\begin{cases} xy \le 0 \\ x+y<0 \end{cases}$$

$xy \le 0$

тогда, когда они разных знаков или равны нулю. Это может быть во II и IV четвертях.

$x+y<0$

$y<-x$

Подставим точку (2;1)

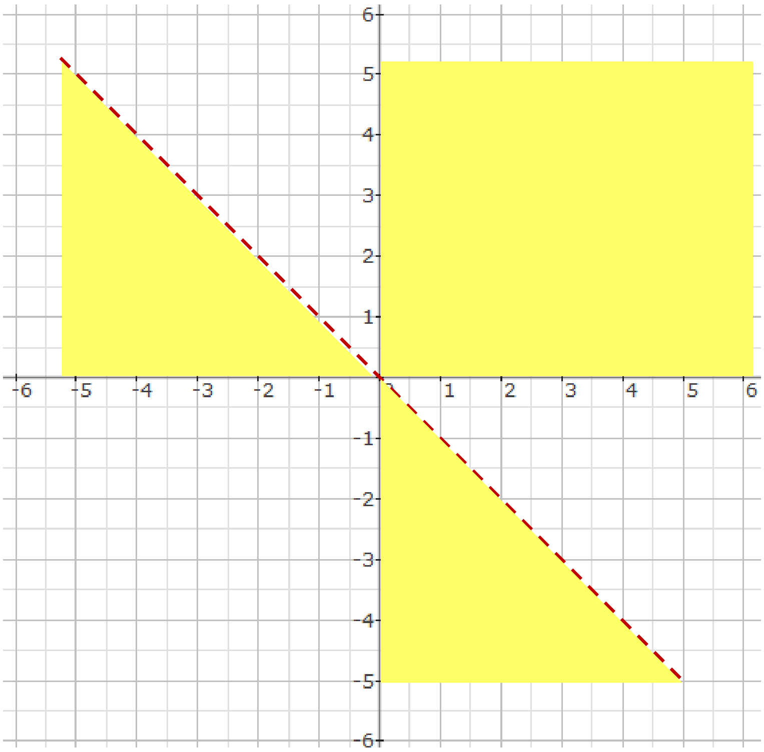
$2>-1$

Эта точка не подходит. Решение неравенства находится ниже прямой $y=-x$.

Решение второй системы – части II и IV четвертей ниже прямой $y=-x$.

Область определения функции – объединение решений двух неравенств.

Закрасим эту область на чертеже.



Задание 3. Найти неопределенные интегралы.

а) $\int \frac{dx}{3-11x} = -\frac{1}{11}\int \frac{d(11x-3)}{11x-3} = -\frac{1}{11}\ln|11x-3| + C$

б) $\int \frac{x\,dx}{1+9x^2} = \frac{1}{18}\int \frac{d(1+9x^2)}{1+9x^2} = \frac{1}{18}\ln|1+9x^2| + C$

в) $\int 2^x(x-3)dx = \left[\begin{array}{l} \int udv = uv - \int vdu \\ u = x-3;\ du = dx \\ dv = 2^x dx;\ v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{array}\right] = \frac{2^x(x-3)}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}dx = \frac{2^x(x-3)}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + C$

г)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x^2+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + C = \arcsin\frac{2x+1}{3}+C$$

д)

$$\int \frac{(3x+2)}{3x^2+1}dx = \int\left(\frac{3x}{3x^2+1}+\frac{2}{3x^2+1}\right)dx = \int\frac{3x}{3x^2+1}dx + \int\frac{2}{3x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{6x}{3x^2+1}dx + \frac{2}{3}\int\frac{1}{x^2+\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(3x^2+1)}{3x^2+1} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|3x^2+1\right| + \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg(x\sqrt{3})+C$$

е) $\int \cos^2(x/4)dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos(x/2))dx = \frac{1}{2}\left(x+2\sin(x/2)\right)+C = \frac{x}{2}+\sin(x/2)+C$