# Контрольная работа по линейному программированию
# Графический и симплекс-метод решения ЗЛП. Транспортная задача

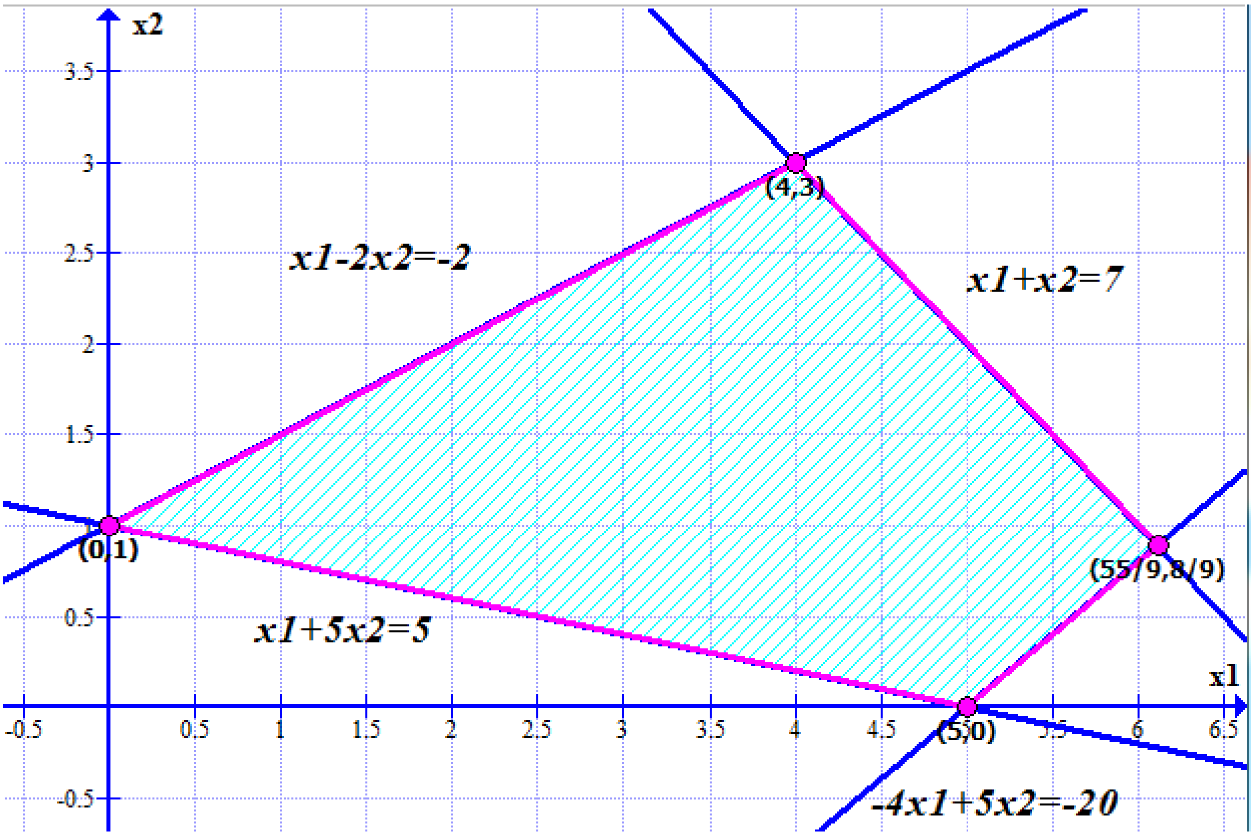
1. Решить графическим методом.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ -4x_1 + 5x_2 \geq -20 \\ x_1 - 2x_2 \geq -2 \end{cases}$$

$$max\ Z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

**Решение.**

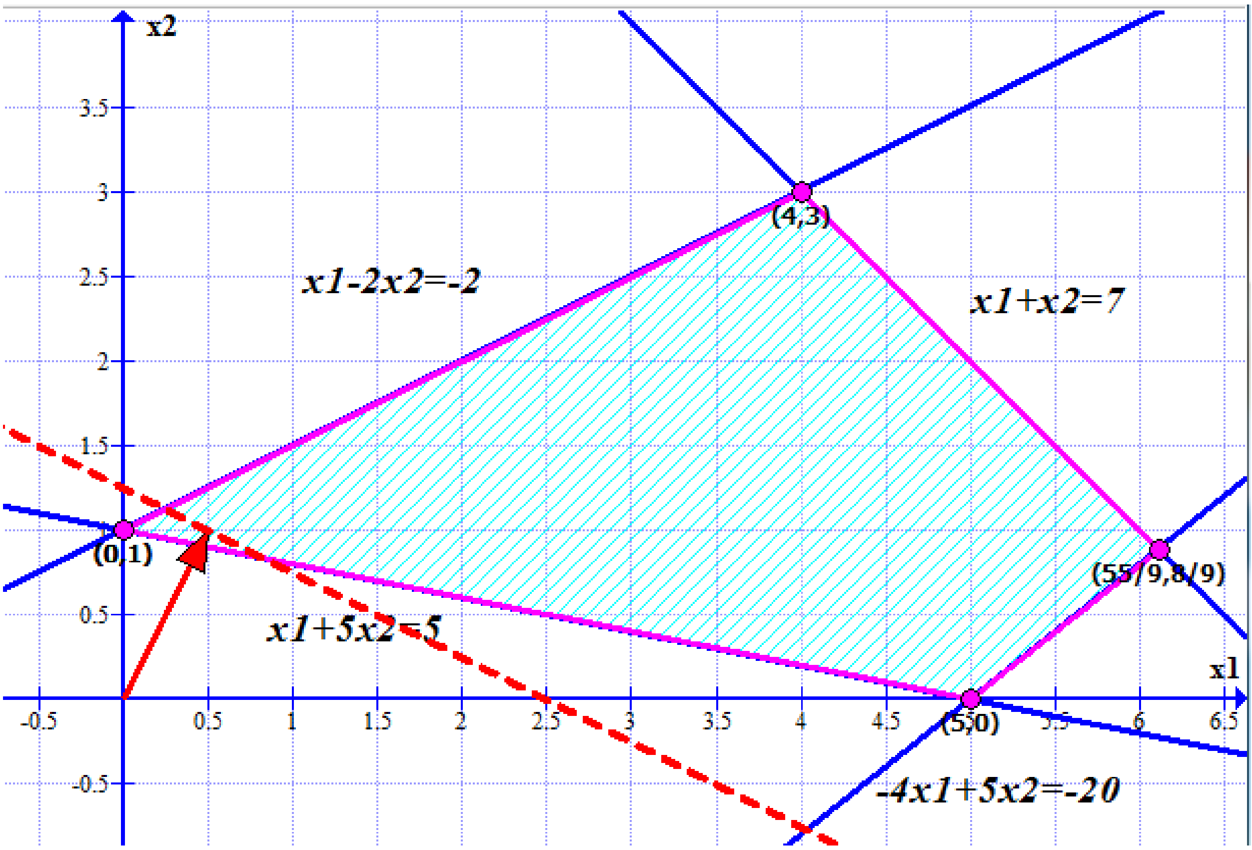
Строим линии ограничений, и находим область допустимых значений.



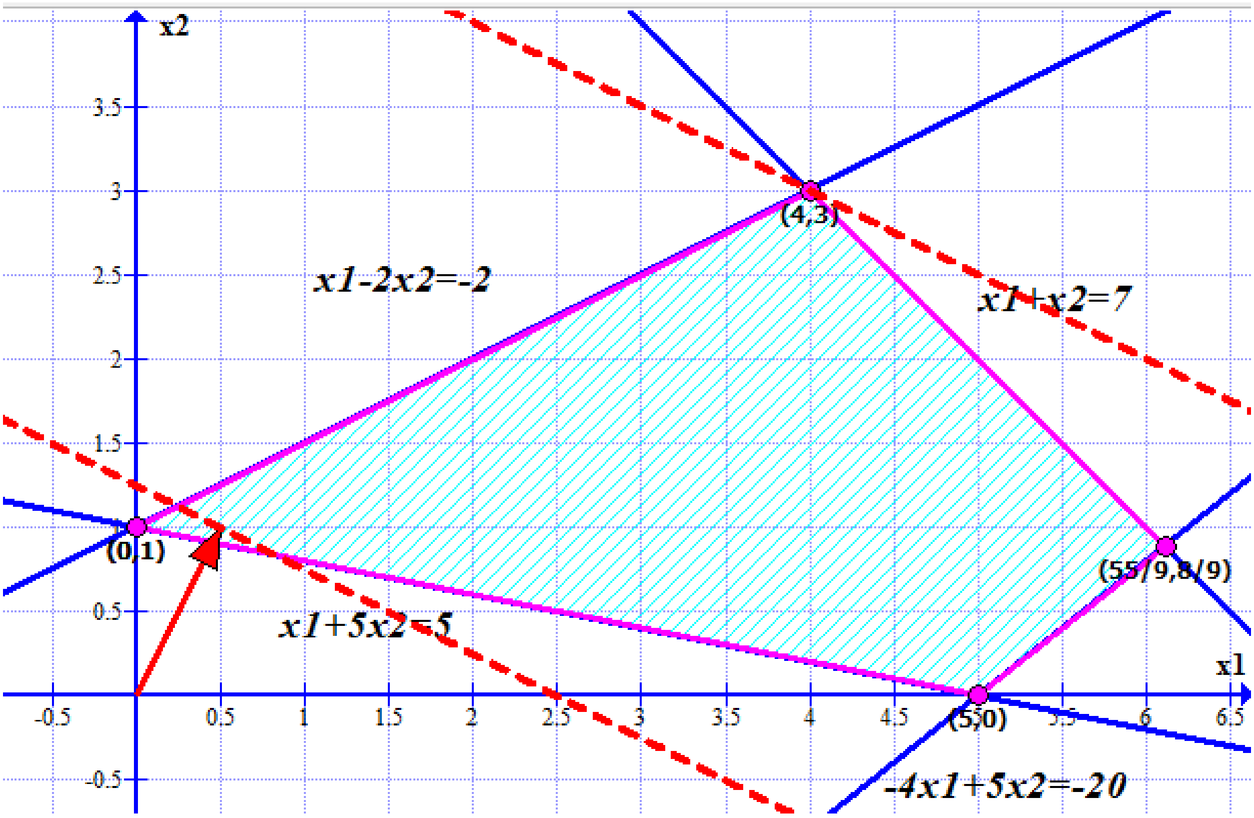

Область допустимых значений – 4-угольник, ограниченный точками (0;1) – (4;3) – (55/9;8/9) – (5;0).

Далее строим направляющий вектор из начала координат в точку (1/2;1).

Проводим перпендикулярно ему прямую целевой функции.




Сдвигаем прямую параллельно до крайнего касания ОДЗ.




Такое касание будет в точке (4;3).

Решение: максимум Z = 4/2 + 3 = 5.

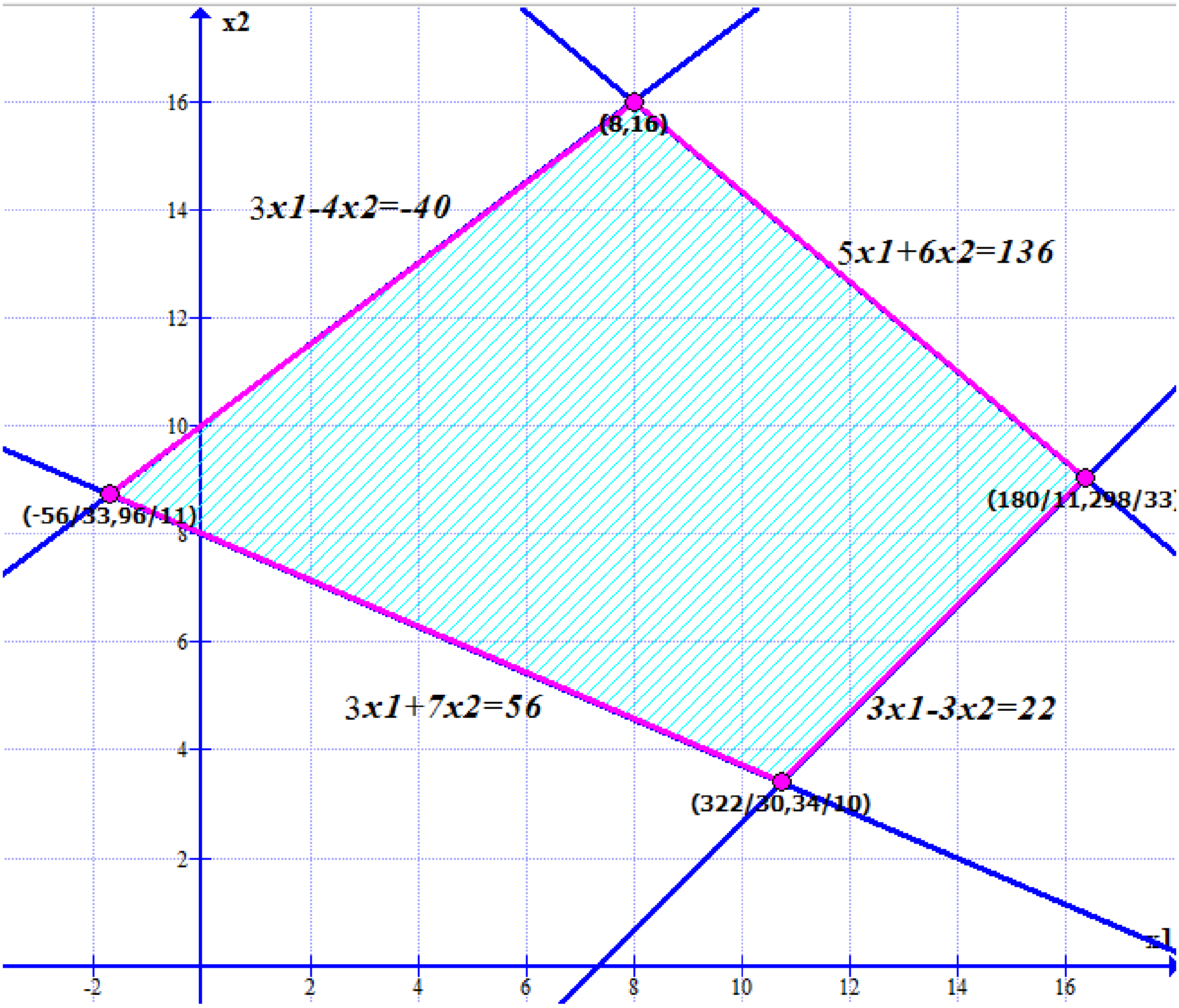
2. Решить графическим методом.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geq -40 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 56 \\ 3x_1 - 3x_2 \leq 22 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 136 \end{cases}$$

$$min\ Z = -5x_1 + 7x_2$$

**Решение.**

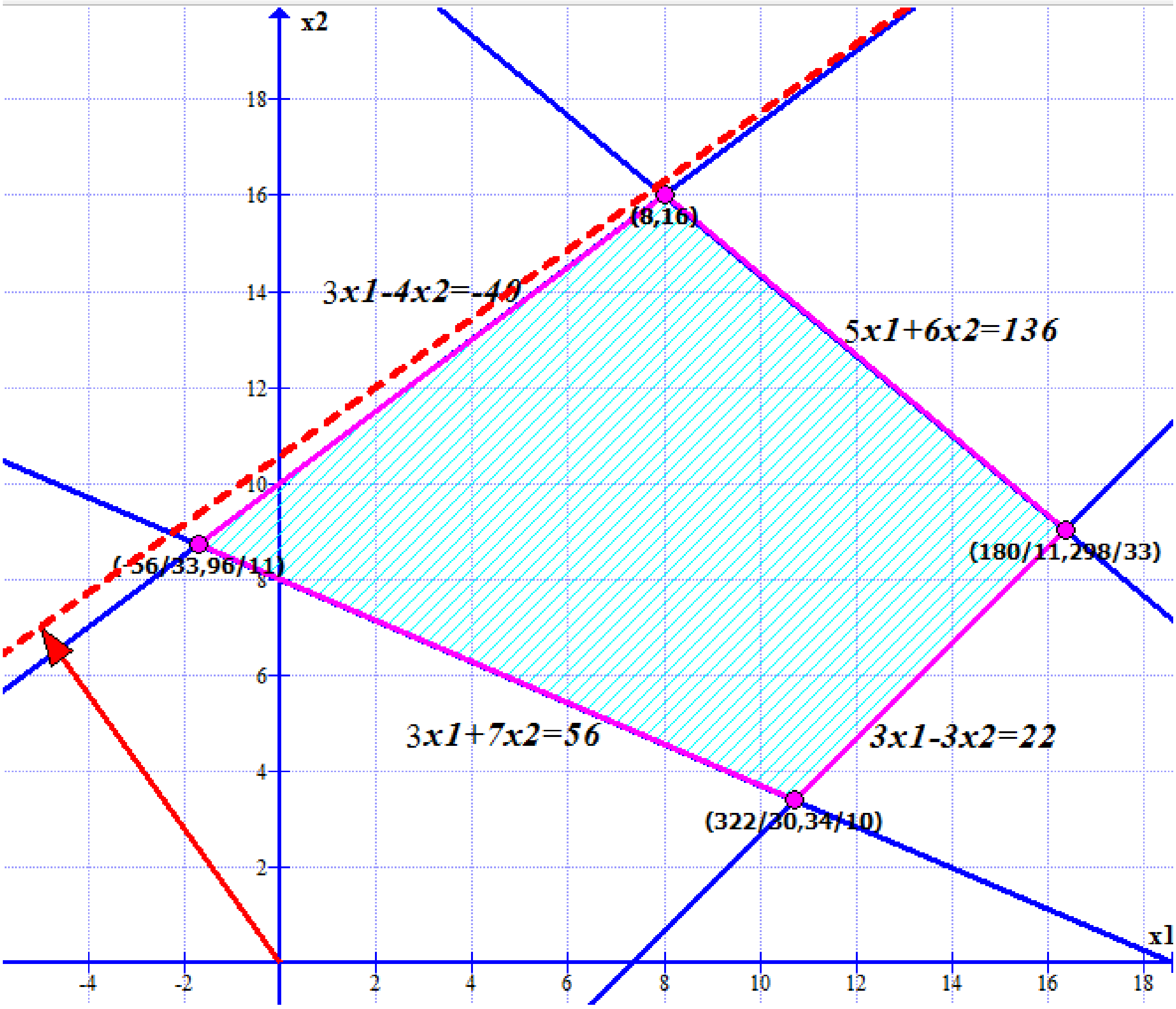
Строим линии ограничений, и находим область допустимых значений.



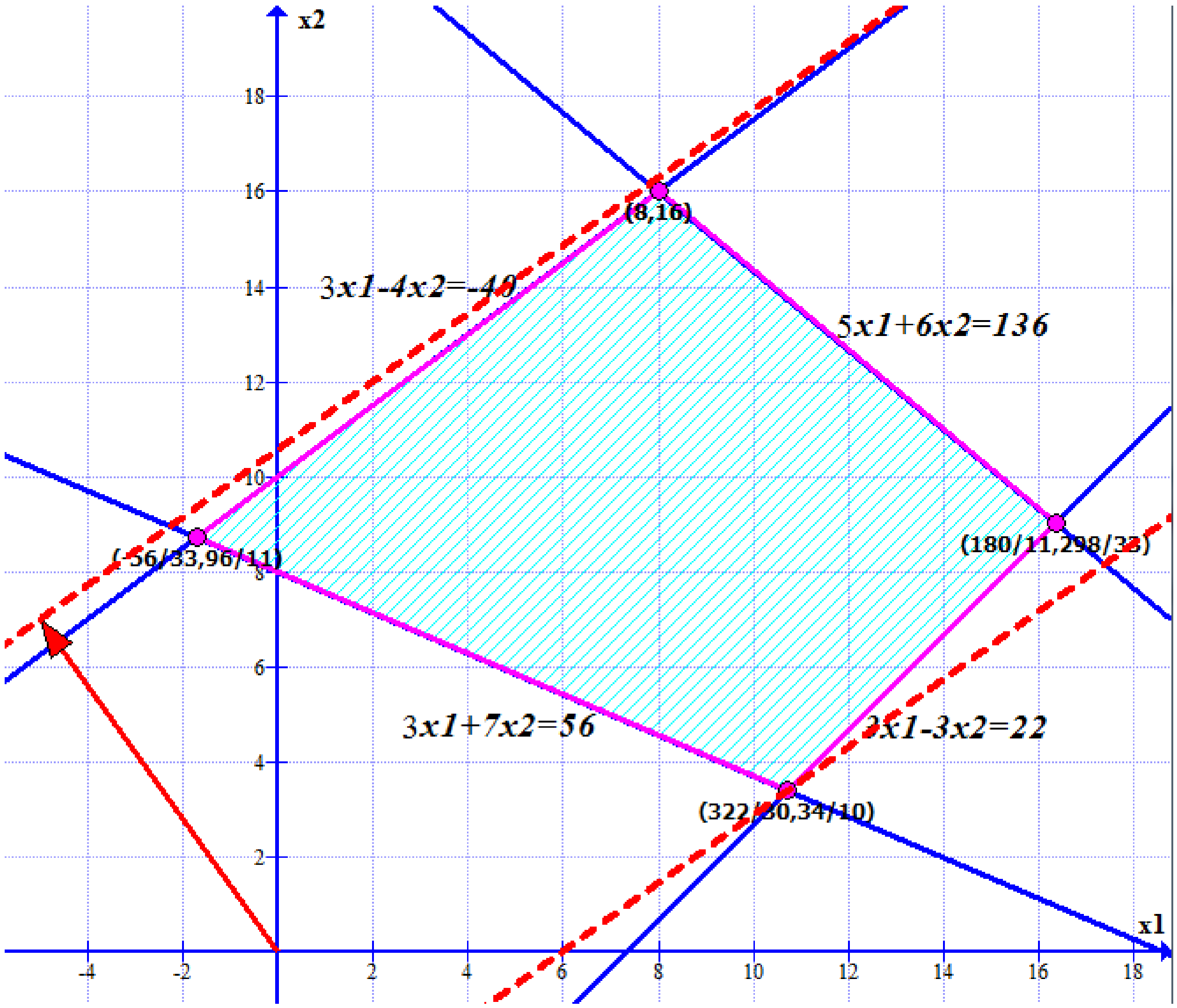

Область допустимых значений – 4-угольник, ограниченный точками (8;16) – (180/11;298/33) – (322/30;34/10) – (-56/33;96/11).

Далее строим направляющий вектор из начала координат в точку (-5;7).

Проводим перпендикулярно ему прямую целевой функции.



Сдвигаем прямую параллельно до крайнего **нижнего** касания ОДЗ.




Такое касание будет в точке (322/30;34/10).

Решение: минимум Z = -5*322/30 + 7*34/10 = -896/30 ≈ -29,87.

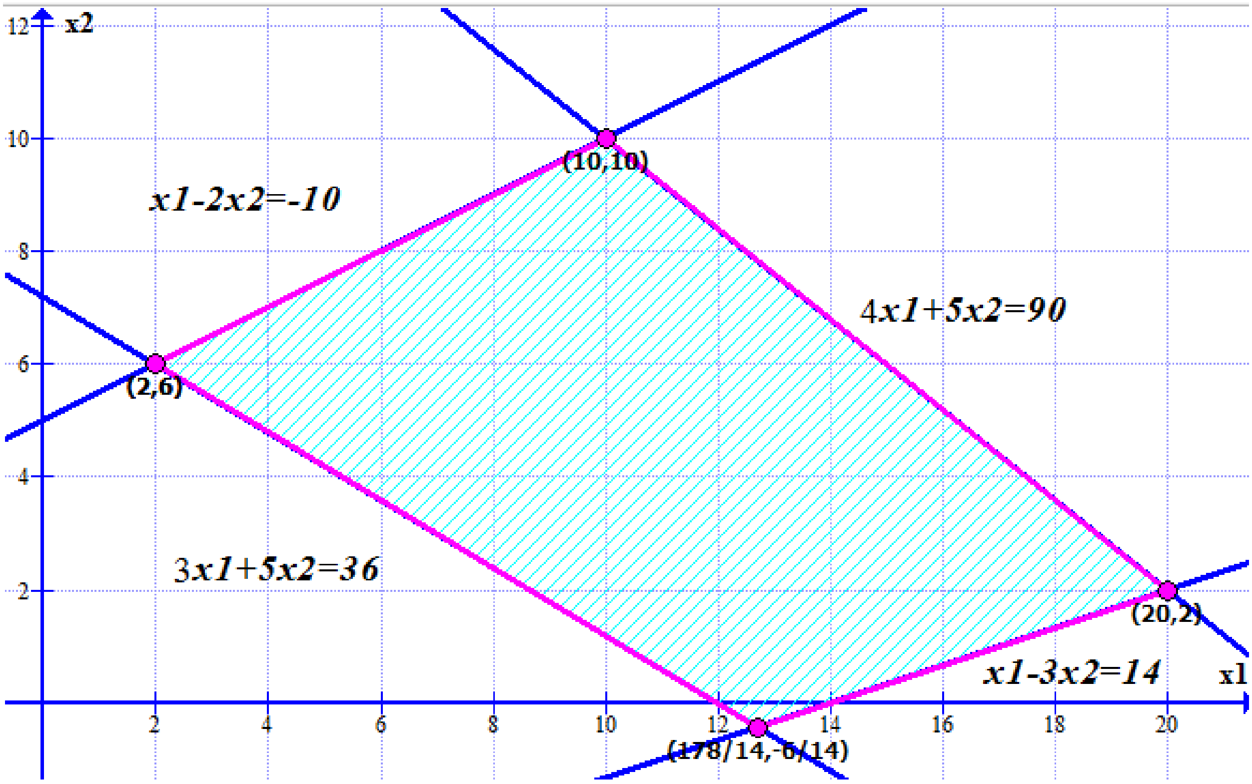
3. Решить графическим методом.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -10 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 36 \\ x_1 - 3x_2 \leq 14 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 90 \end{cases}$$

$$\min\ Z = 2x_1 - 5x_2$$

**Решение.**

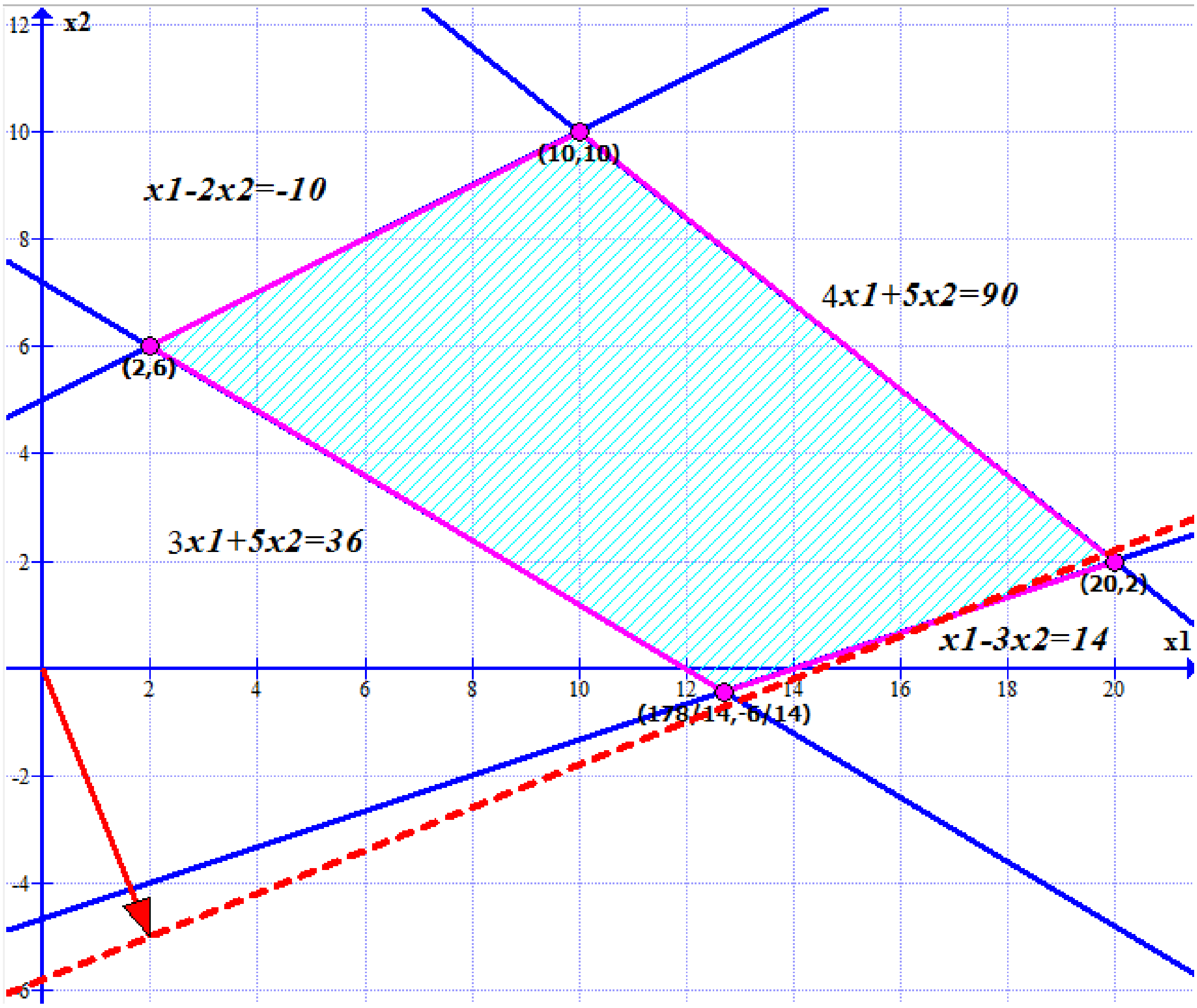
Строим линии ограничений, и находим область допустимых значений.



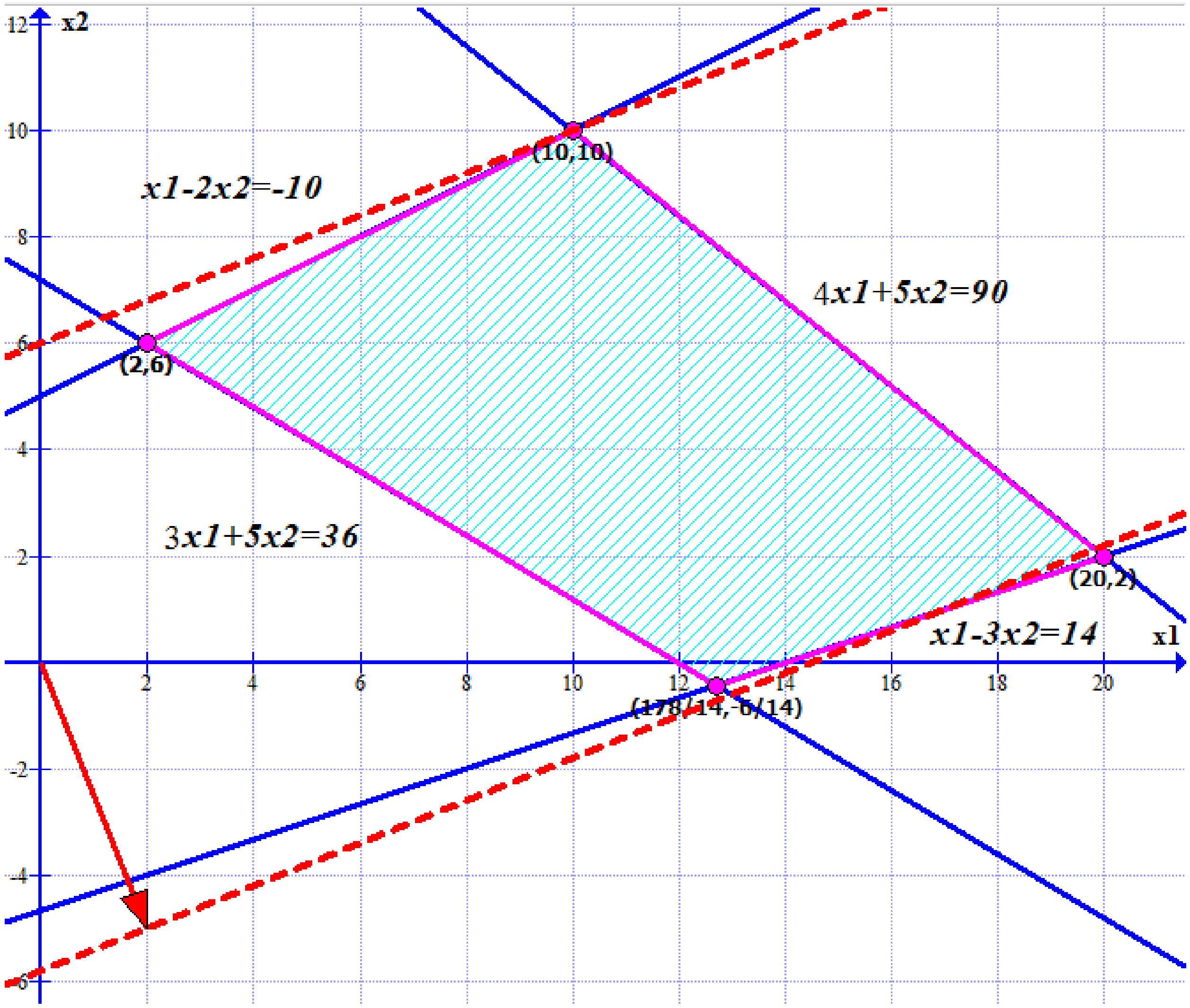

Область допустимых значений – 4-угольник, ограниченный точками (2;6) – (10;10) – (20;2) – (178/14;-6/14).

Далее строим направляющий вектор из начала координат в точку (2;-5).

Проводим перпендикулярно ему прямую целевой функции.



Сдвигаем прямую параллельно до крайнего **верхнего** касания ОДЗ.




Такое касание будет в точке (10;10).

Решение: минимум Z = 2*10 - 5*10 = -30.

4. Решить симплекс методом.

$$Z_{max} = 7x_1 + x_3 - x_4 + x_5$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 4 \end{cases}$$

**Решение.**

Вводим в базис $x_3$, $x_4$, $x_5$ выражаем базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1 + x_2 \\ x_4 = 12 - 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_5 \\ x_5 = 4 - 2x_1 - x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 - x_1 + x_2 \\ x_4 = 3 + 3x_1 - x_2 \\ x_5 = 4 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

Подставляем найденные выражения переменных в целевую функцию.

$$Z = 7x_1 + (1 - x_1 + x_2) - (3 + 3x_1 - x_2) + (4 - 2x_1 - x_2)$$
$$Z = 2 + x_1 + x_2$$

как видим, коэффициенты при переменных целевой функции – положительные, то есть, увеличивая $x_1$, $x_2$, мы можем увеличить целевую функцию, то есть план не оптимален.

Вводим $x_1$ в базис, выводим $x_3$

Базис - $x_1$, $x_4$, $x_5$ выражаем базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - x_3 \\ x_4 = 6 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_5 = 2 - 3x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Подставляем найденные выражения переменных в целевую функцию.

$$Z = 3 + 2x_2 - x_3$$

как видим, коэффициент при переменной $x_2$ – положительный, то есть, увеличивая $x_2$, мы можем увеличить целевую функцию, то есть план не оптимален.

Вводим $x_2$ в базис, выводим $x_5$

Базис – $x_1$, $x_4$, $x_2$ выражаем базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_4 = \frac{22}{3} - \frac{5}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 \\ x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

Подставляем найденные выражения переменных в целевую функцию.

$$Z = \frac{13}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5$$

как видим, коэффициент при переменной $x_3$ – положительный, то есть, увеличивая $x_3$, мы можем увеличить целевую функцию, то есть план не оптимален.

Вводим $x_3$ в базис, выводим $x_4$

Базис – $x_1$, $x_2$, $x_3$ выражаем базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 \\ x_2 = \frac{18}{5} - \frac{2}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5 \\ x_3 = \frac{22}{5} - \frac{3}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5 \end{cases}$$

Подставляем найденные выражения переменных в целевую функцию.

$$Z = \frac{29}{5} - \frac{1}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_5$$

все коэффициенты при переменных в целевой функции – отрицательные, найден оптимальный план

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} \\ x_2 = \frac{18}{5} \\ x_3 = \frac{22}{5} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$Z_{max} = \frac{29}{5}$$

5. Решить симплекс методом.

$$Z_{max} = 5x_2 + x_3 - x_4 + x_5$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10 \end{cases}$$

**Решение.**

Вводим в базис $x_1$, $x_2$, $x_3$ выражаем базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = 2 + x_1 - x_3 \\ x_1 = 2 + 2x_2 - x_4 \\ x_3 = 10 - 2x_1 - x_2 - x_4 - 2x_5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = 2 + (2 + 2x_2 - x_4) - (10 - 2(2 + 2x_2 - x_4) - x_2 - x_4 - 2x_5) \\ x_1 = 2 + 2x_2 - x_4 \\ x_3 = 10 - 2x_1 - x_2 - x_4 - 2x_5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_1 = 2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5\right) - x_4 \\ x_3 = 10 - 2\left(2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_4\right) - x_4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_4\right) - x_4 - 2x_5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \\ x_3 = \frac{13}{3} - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

Подставляем найденные выражения переменных в целевую функцию.

$$Z = 5\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{3}{3}x_5\right) + \left(\frac{13}{3} - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5\right) - x_4 + x_5$$

$$Z = \frac{53}{3} - \frac{10}{3}x_4 - \frac{8}{3}x_5$$

все коэффициенты при переменных в целевой функции – отрицательные, найден оптимальный план

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{13}{3} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$Z_{max} = \frac{53}{3}$$

7. Решить транспортную задачу.

$$a_i : 20, 110, 120;$$

$$b_j : 70, 40, 30, 60, 50;$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 7 & 6 \\ 7 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Решение.**

Составляем распределительную таблицу.

В заголовках строк и столбцов стоят сначала объемы спроса и предложения, затем (вторым числом) будут стоять потенциалы.

В ячейках стоят:

справа вверху – стоимость перевозки

справа внизу – объем перевозки

слева вверху – потенциал клетки

Справа от таблицы стоят остатки предложения поставщиков, снизу от таблицы – остатки спроса потребителей.

В правом нижнем углу – суммарная стоимость перевозки.

| a\q | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | | 4 | | 2 | | 5 | | 7 | | 6 | | |
| | | | | | | | | | | | | 20 |
| 110 | | 7 | | 8 | | 3 | | 4 | | 5 | | |
| | | | | | | | | | | | | 110 |
| 120 | | 2 | | 1 | | 4 | | 3 | | 2 | | |
| | | | | | | | | | | | | 120 |
| | | | | | | | | | | | | |
| | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | Ст | 0 |

Находим начальный план методом наименьшей стоимости.

Выбираем перевозку с наименьшей стоимостью (1) и перевозим минимум из спроса по столбцу и предложения по строке min(40;120)=40.

| a\q | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | | 4 | | 2 | | 5 | | 7 | | 6 | | |
| | | | | | | | | | | | | 20 |
| 110 | | 7 | | 8 | | 3 | | 4 | | 5 | | |
| | | | | | | | | | | | | 110 |
| 120 | | 2 | | 1 | | 4 | | 3 | | 2 | | |
| | | | | 40 | | | | | | | | 80 |
| | | | | | | | | | | | | |
| | 70 | | 0 | | 30 | | 60 | | 50 | | Ст | 40 |

Далее двигаемся аналогично, выбирая наименьшие стоимости.

| a\q | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | | 4 | | 2 | | 5 | | 7 | | 6 | | |
| | | | | | | | | | | | | 20 |
| 110 | | 7 | | 8 | | 3 | | 4 | | 5 | | |
| | | | | | | | | | | | | 110 |
| 120 | | 2 | | 1 | | 4 | | 3 | | 2 | | |
| | | 70 | | 40 | | | | | | 10 | | 0 |
| | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | | 0 | | 30 | | 60 | | 40 | | Ст | 200 |

| a\q | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | | 4 | | 2 | | 5 | | 7 | | 6 | | |
| | | | | | | | | | | | | 20 |
| 110 | | 7 | | 8 | | 3 | | 4 | | 5 | | |
| | | | | | | 30 | | | | | | 80 |
| 120 | | 2 | | 1 | | 4 | | 3 | | 2 | | |
| | | 70 | | 40 | | | | | | 10 | | 0 |
| | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | | 0 | | 0 | | 60 | | 40 | | Ст | 290 |

| a\q | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | | 4 | | 2 | | 5 | | 7 | | 6 | | |
| | | | | | | | | | | | | 20 |
| 110 | | 7 | | 8 | | 3 | | 4 | | 5 | | |
| | | | | | | 30 | | 60 | | | | 20 |
| 120 | | 2 | | 1 | | 4 | | 3 | | 2 | | |
| | | 70 | | 40 | | | | | | 10 | | 0 |
| | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 40 | | Ст | 530 |

| a\q | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | | 4 | | 2 | | 5 | | 7 | | 6 | | |
| | | | | | | | | | | 20 | | 0 |
| 110 | | 7 | | 8 | | 3 | | 4 | | 5 | | |
| | | | | | | 30 | | 60 | | 20 | | 0 |
| 120 | | 2 | | 1 | | 4 | | 3 | | 2 | | |
| | | 70 | | 40 | | | | | | 10 | | 0 |
| | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | Ст | 750 |

Стоимость данного плана = 750.

Далее производим оценку эффективности плана по методу наименьшей стоимости расчетом потенциалов.

Потенциал 1 строки = 0.

| a\q | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | | 4 | | 2 | | 5 | | 7 | | 6 |
| ***0*** | | | | | | | | | | 20 |
| 110 | | 7 | | 8 | | 3 | | 4 | | 5 |
| | | | | | | 30 | | 60 | | 20 |
| 120 | | 2 | | 1 | | 4 | | 3 | | 2 |
| | | 70 | | 40 | | | | | | 10 |

Ищем в 1 строке перевозки (в 5 столбце), и рассчитываем потенциалы соответствующих столбцов (стоимость перевозки – потенциал строки):

потенциал 5 столбца = 6-0=6

| a\q | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | ***6*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | | 4 | | 2 | | 5 | | 7 | | 6 |
| ***0*** | | | | | | | | | | 20 |
| 110 | | 7 | | 8 | | 3 | | 4 | | 5 |
| | | | | | | 30 | | 60 | | 20 |
| 120 | | 2 | | 1 | | 4 | | 3 | | 2 |
| | | 70 | | 40 | | | | | | 10 |

Аналогично определяем потенциалы прочих строк и столбцов, следуя правилу – двигаемся по ячейкам с перевозками и (потенциал строки + потенциал столбца = стоимость перевозки).

| a\q | 70 | ***6*** | 40 | ***5*** | 30 | ***4*** | 60 | ***5*** | 50 | ***6*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | | 4 | | 2 | | 5 | | 7 | | 6 |
| ***0*** | | | | | | | | | | 20 |
| 110 | | 7 | | 8 | | 3 | | 4 | | 5 |
| ***-1*** | | | | | | 30 | | 60 | | 20 |
| 120 | | 2 | | 1 | | 4 | | 3 | | 2 |
| ***-4*** | | 70 | | 40 | | | | | | 10 |

Далее рассчитываем потенциалы ячеек (потенциал строки + потенциал столбца - стоимость перевозки, потенциал занятой ячейки = 0).

| a\q | 70 | ***6*** | 40 | ***5*** | 30 | ***4*** | 60 | ***5*** | 50 | ***6*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | ***2*** | 4 | ***3*** | 2 | ***-1*** | 5 | -2 | 7 | 0 | 6 |
| ***0*** | | | | | | | | | | 20 |
| 110 | ***-2*** | 7 | ***-4*** | 8 | ***0*** | 3 | 0 | 4 | 0 | 5 |
| ***-1*** | | | | | | 30 | | 60 | | 20 |
| 120 | ***0*** | 2 | ***0*** | 1 | ***-4*** | 4 | -2 | 3 | 0 | 2 |
| ***-4*** | | 70 | | 40 | | | | | | 10 |

Как видим, у ячеек (1,1) и (1,2) потенциал больше 0, значит, там обязательно нужна перевозка.

Перераспределяем.

Ставим «+» куда перераспределяем перевозку, «-» - откуда перераспределяем.

| a\q | 70 | **6** | 40 | **5** | 30 | **4** | 60 | **5** | 50 | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | **2** | 4 | **3** | 2 | **-1** | 5 | -2 | 7 | 0 | 6 |
| **0** | | | + | | | | | | - | 20 |
| 110 | **-2** | 7 | **-4** | 8 | **0** | 3 | 0 | 4 | 0 | 5 |
| **-1** | | | | | | 30 | | 60 | | 20 |
| 120 | **0** | 2 | **0** | 1 | **-4** | 4 | -2 | 3 | 0 | 2 |
| **-4** | | 70 | - | 40 | | | | | + | 10 |

Перераспределяем минимальное значение из ячеек с «-» - это 20.

Пересчитываем потенциалы.

| a\q | 70 | **3** | 40 | **2** | 30 | **1** | 60 | **2** | 50 | **3** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | **-1** | 4 | **0** | 2 | **-4** | 5 | -5 | 7 | -3 | 6 | | |
| **0** | | | + | 20 | | | | | - | | | 0 |
| 110 | **-2** | 7 | **-4** | 8 | **0** | 3 | 0 | 4 | 0 | 5 | | |
| **2** | | | | | | 30 | | 60 | | 20 | | 0 |
| 120 | **0** | 2 | **0** | 1 | **-4** | 4 | -2 | 3 | 0 | 2 | | |
| **-1** | | 70 | - | 20 | | | | | + | 30 | | 0 |
| | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | Ст | 690 |

План оптимален, так как потенциалы всех ячеек не положительны.

Минимальная стоимость перевозки = 690.

8. Решить транспортную задачу.

$a_i : 40, 25;$

$b_j : 10, 35, 20;$

$$c = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

**Решение.**

Составляем распределительную таблицу.

| a\q | 10 | | 35 | | 20 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | | 7 | | 2 | | 4 | | |
| | | | | | | | | 40 |
| 25 | | 3 | | 8 | | 9 | | |
| | | | | | | | | 25 |
| | | | | | | | | |
| | 10 | | 35 | | 20 | | Ст | 0 |

Находим начальный план методом наименьшей стоимости.

Выбираем перевозку с наименьшей стоимостью (2) и перевозим минимум из спроса по столбцу и предложения по строке min(35;40)=35.

| a\q | 10 | | 35 | | 20 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | | 7 | | 2 | | 4 | | |
| | | | | 35 | | | | 5 |
| 25 | | 3 | | 8 | | 9 | | |
| | | | | | | | | 25 |
| | | | | | | | | |
| | 10 | | 0 | | 20 | | Ст | 70 |

Далее двигаемся аналогично, выбирая наименьшие стоимости.

| a\q | 10 | | 35 | | 20 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | | 7 | | 2 | | 4 | | |
| | | | | 35 | | | | 5 |
| 25 | | 3 | | 8 | | 9 | | |
| | | 10 | | | | | | 15 |
| | | | | | | | | |
| | 0 | | 0 | | 20 | | Ст | 100 |

| a\q | 10 | | 35 | | 20 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | | 7 | | 2 | | 4 | | |
| | | | | 35 | | 5 | | 0 |
| 25 | | 3 | | 8 | | 9 | | |
| | | 10 | | | | 15 | | 0 |
| | | | | | | | | |
| | 0 | | 0 | | 0 | | Ст | 255 |

Стоимость данного плана = 255.

Далее производим оценку эффективности плана по методу наименьшей стоимости расчетом потенциалов.

Потенциал 1 строки = 0.

| a\q | 10 | | 35 | | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | | 7 | | 2 | | 4 |
| ***0*** | | | | 35 | | 5 |
| 25 | | 3 | | 8 | | 9 |
| | | 10 | | | | 15 |

Ищем в 1 строке перевозки (в 2 и 3 столбце), и рассчитываем потенциалы соответствующих столбцов (стоимость перевозки – потенциал строки):

потенциал 2 столбца = 2-0=2

потенциал 3 столбца = 4-0=4

| a\q | 10 | | 35 | ***2*** | 20 | ***4*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | | 7 | | 2 | | 4 |
| ***0*** | | | | 35 | | 5 |
| 25 | | 3 | | 8 | | 9 |
| | | 10 | | | | 15 |

Аналогично определяем потенциалы прочих строк и столбцов, следуя правилу – двигаемся по ячейкам с перевозками и (потенциал строки + потенциал столбца = стоимость перевозки).

| a\q | 10 | ***-2*** | 35 | ***2*** | 20 | ***4*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | | 7 | | 2 | | 4 |
| ***0*** | | | | 35 | | 5 |
| 25 | | 3 | | 8 | | 9 |
| ***5*** | | 10 | | | | 15 |

Далее рассчитываем потенциалы ячеек (потенциал строки + потенциал столбца - стоимость перевозки, потенциал занятой ячейки = 0).

| a\q | 10 | ***-2*** | 35 | ***2*** | 20 | ***4*** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | ***-9*** | 7 | ***0*** | 2 | ***0*** | 4 | | |
| ***0*** | | | | 35 | | 5 | | 0 |
| 25 | ***0*** | 3 | ***-1*** | 8 | ***0*** | 9 | | |
| ***5*** | | 10 | | | | 15 | | 0 |
| | | | | | | | | |
| | 0 | | 0 | | 0 | | Ст | 255 |

План оптимален, так как потенциалы всех ячеек не положительны.

Минимальная стоимость перевозки = 255.