

Контрольная работа по линейному программированию Симплекс-метод. Расчеты в Excel

Задача 1. Решить задачу линейного программирования:

$$F = 24x_1 - 4x_2 + 12x_3 + 5 \Rightarrow \min_{x_1, x_2, x_3}$$

при условии

$$6x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 22$$

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Пусть первое ограничение изменится на $6x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 24$. Насколько изменится значение целевой функции в оптимальной точке?

Пусть относительно первоначальной задачи целевая функция изменится на $z = 24x_1 - 4x_2 + 13x_3 + 5$. Как изменится значение целевой функции в оптимальной точке?

Решение.

Обращаем задачу на максимум.

$$F = -24x_1 + 4x_2 - 12x_3 - 5 \Rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3}$$

при условии

$$-6x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -22$$

$$-4x_1 + x_2 - 3x_3 \leq -18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Вводим переменные, приводя систему неравенств к системе равенств.

$$\begin{cases} -6x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -22 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 \leq -18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -22 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -18 \end{cases}$$

Составляем симплекс таблицу.

Исходная						
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5
x4	-22	-6	1	-2	1	0
x5	-18	-4	1	-3	0	1
F(X)	-5	24	-4	12	0	0

Шаг 1 – в базисе переменная $x_4 = -22$, этого не должно быть, выводим x_4 из базиса, вводим x_1 .

Шаг 1						
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5
x4	-22	-6	1	-2	1	0
x5	-18	-4	1	-3	0	1
F(X)	-5	24	-4	12	0	0

Шаг 2						
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5
x1	3,67	1	-0,17	0,33	-0,17	0
x5	-3,33	0	0,33	-1,67	-0,67	1
F(X)	-93	0	0	4	4	0

Шаг 2 – в базисе переменная $x_5 = -3,33$, этого не должно быть, выводим x_5 из базиса, вводим x_3 .

Шаг 2						
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5
x1	3,67	1	-0,17	0,33	-0,17	0
x5	-3,33	0	0,33	-1,67	-0,67	1
F(X)	-93	0	0	4	4	0

Шаг 3						
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5
x1	3	1	-0,1	0	-0,3	0,2
x3	2	0	-0,2	1	0,4	-0,6
F(X)	-101	0	0,8	0	2,4	2,4

В полученной таблице все коэффициенты в строке целевой функции положительные.

Найдено оптимальное решение.

Базис	БП
x1	3
x3	2
F(X)	-101

Решение исходной задачи (на минимум):

$$F_{min} = 101$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Смотрим в последней симплекс таблице двойственные оценки.

Шаг 3						
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5
x1	3	1	-0,1	0	-0,3	0,2
x3	2	0	-0,2	1	0,4	-0,6
F(X)	-101	0	0,8	0	2,4	2,4

Значение переменной $x_4 = 2,4$ – это значит, что при изменении правой части ограничения $6x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 22$ на единицу, целевое значение функции изменится на 2,4.

Новое ограничение: $6x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 24$

Мы меняем на $24 - 22 = 2$, значение функции будет $= 101 + 2 \cdot 2,4 = 105,8$.

Проверим.

Исходная									
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5			
x4	-24	-6	1	-2	1	0			
x5	-18	-4	1	-3	0	1			
F(X)	-5	24	-4	12	0	0			
Шаг 1									
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5			
x4	-24	-6	1	-2	1	0	Вводим	x3	
x5	-18	-4	1	-3	0	1	Выводим	x4	
F(X)	-5	24	-4	12	0	0			
Шаг 2									
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5			
x1	4,00	1	-0,17	0,33	-0,17	0	Вводим	x3	
x5	-2,00	0	0,33	-1,67	-0,67	1	Выводим	x5	
F(X)	-101	0	0	4	4	0			
Шаг 3									
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5			
x1	3,6	1	-0,1	0	-0,3	0,2			
x3	1,2	0	-0,2	1	0,4	-0,6			
F(X)	-105,8	0	0,8	0	2,4	2,4			

Все верно.

Далее меняем коэффициент целевой функции при x_3 с 12 на 13.

Исходная						
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5
x4	-22	-6	1	-2	1	0
x5	-18	-4	1	-3	0	1
F(X)	-5	24	-4	13	0	0
Шаг 1						
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5
x4	-22	-6	1	-2	1	0
x5	-18	-4	1	-3	0	1
F(X)	-5	24	-4	13	0	0
Шаг 2						
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5
x1	3,67	1	-0,17	0,33	-0,17	0
x5	-3,33	0	0,33	-1,67	-0,67	1
F(X)	-93	0	0	5	4	0
Шаг 3						
Базис	БП	x1	x2	x3	x4	x5
x1	3	1	-0,1	0	-0,3	0,2
x3	2	0	-0,2	1	0,4	-0,6
F(X)	-103	0	1	0	2	3

Новое решение:

$$F_{min} = 103$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Значение функции выросло на 2, пропорционально значению 2 – значению переменной в оптимальном плане.

Задача 2. Решить задачу линейного программирования с использованием симплекс-метода:

$$f = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max_{x_1, x_2}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Решение.

Вводим переменные, приводя систему неравенств к системе равенств.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \end{cases}$$

Составляем симплекс таблицу.

Исходная					
Базис	БП	x1	x2	x3	x4
x3	6	2	1	1	0
x4	8	1	2	0	1
F(X)	0	-3	-2	0	0

Выполняем пересчеты.

Смотрим строку коэффициентов строки целевой функции – там есть отрицательные элементы, выбираем максимальный по модулю - вводим x_1 в базис.

Шаг 1					
Базис	БП	x1	x2	x3	x4
x3	6	2	1	1	0
x4	8	1	2	0	1
F(X)	0	-3	-2	0	0

Для определения переменной к выводу из базиса делим столбец базисных переменных (БП) на коэффициенты столбца x_1 и выбираем минимальное.

Шаг 1								
Базис	БП	x1	x2	x3	x4			
x3	6	2	1	1	0	3	Вводим	x1
x4	8	1	2	0	1	8	Выводим	x3
F(X)	0	-3	-2	0	0			

Выводим x_3 .

Пересчитываем.

Шаг 2					
Базис	БП	x1	x2	x3	x4
x1	3	1	0,5	0,5	0
x4	5	0	1,5	-0,5	1
F(X)	9	0	-0,5	1,5	0

Смотрим строку коэффициентов строки целевой функции – там есть отрицательные элементы, вводим x_2 в базис, выводим x_4 .

Шаг 2								
Базис	БП	x1	x2	x3	x4			
x1	3	1	0,5	0,5	0	6	Вводим	x2
x4	5	0	1,5	-0,5	1	3,33	Выводим	x4
F(X)	9	0	-0,5	1,5	0			

Шаг 3					
Базис	БП	x1	x2	x3	x4
x1	1,33	1	0	0,67	-0,33
x2	3,33	0	1	-0,33	0,67
F(X)	10,67	0	0	1,33	0,33

В полученной таблице все коэффициенты в строке целевой функции положительные.

Найдено оптимальное решение.

Базис	БП
x1	1,33
x2	3,33
F(X)	10,67

Контрольная работа по линейному программированию. Выполнена на www.MatBuro.ru

©МатБюро – Решение заданий математики, экономики, программирования

Сделаем ваши задания на отлично. https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=mp

$$F_{max} = 10,67$$

$$\begin{cases} x_1 = 1,33 \\ x_2 = 3,33 \end{cases}$$