Математические методы в экономике. Контрольная работа

Задача 1.

Цех хлебозавода по производству муки заключил контракт с мини-пекарней о поставке ежедневно 300 кг ржаной и пшеничной муки, причем пшеничной - не менее 50%. Зерно, поступающее в цех, проходит в нем обмолот, помол и упаковку муки. Трудозатраты (в человеко-часах) на указанные операции представлены в таблице:

Операция	*Ржаная мука*	*Пшеничная мука*	*Имеющийся ресурс*
Обмолот	*0,1*	*0,1*	*30*
Помол	*0,1*	*0,08*	*27*
Упаковка	*0,05*	*0,05*	*200*

Себестоимость одного килограмма ржаной муки составляет 14 рублей, а пшеничной - 18 рублей. Требуется найти оптимальный план производства продукции, позволяющий цеху выполнить условия контракта с наименьшими затратами.

Решение.

Пусть планируется производить x_1 кг ржаной муки и x_2 кг пшеничной муки, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
Каждый день требуется поставлять 300 кг муки, поэтому $x_1 + x_2 = 300$. Пшеничной муки при этом должно быть не менее 50%, то есть не менее 150 кг: $x_2 \geq 150$.
Трудозатраты на обмолот составят $0.1x_1 + 0.1x_2$ человеко-часов, что не должно превышать ресурса в 30 человеко-часов. Запишем ограничение $0.1x_1 + 0.1x_2 \leq 30$.
Аналогично запишем ограничения на ресурс трудозатрат на помол и упаковку: $0.1x_1 + 0.08x_2 \leq 27$, $0.05x_1 + 0.05x_2 \leq 200$.
Себестоимость продукции составит $14x_1 + 18x_2$ руб. Требуется минимизировать затраты на производство. Запишем задачу:

$$f(X) = 14x_1 + 18x_2 \to min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_2 \geq 150 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 \leq 30 \\ 0.1x_1 + 0.08x_2 \leq 27 \\ 0.05x_1 + 0.05x_2 \leq 200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

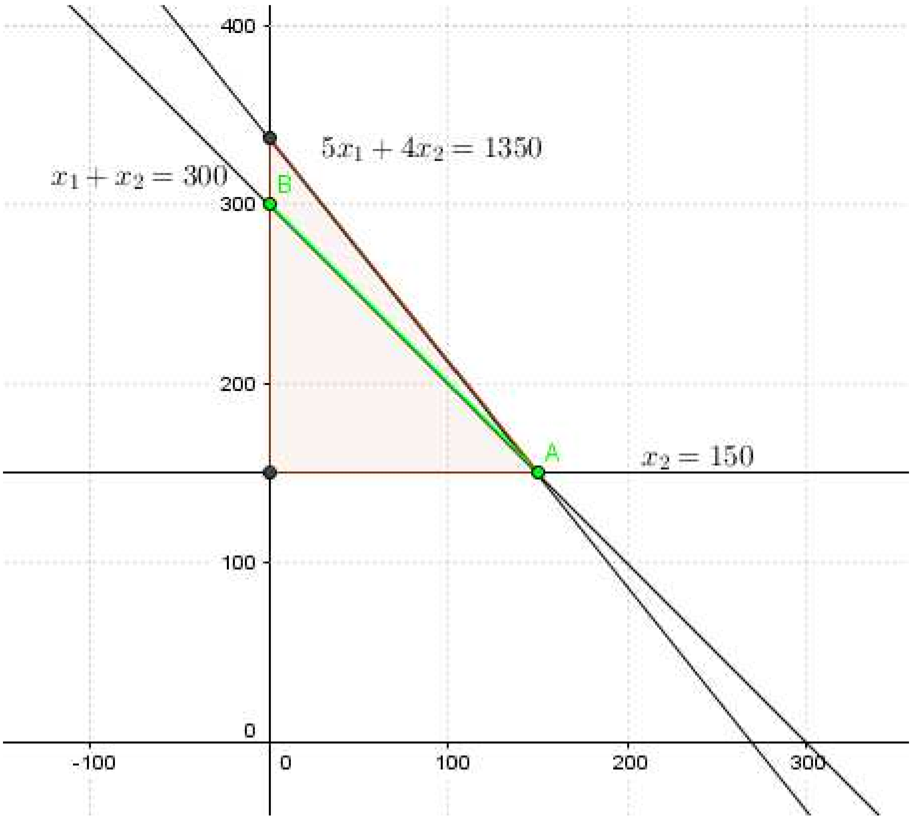
Упростим задачу. Домножим ограничение $0.1x_1 + 0.1x_2 \leq 30$ на 10, ограничение $0.1x_1 + 0.08x_2 \leq 27$ - на 50, ограничение $0.05x_1 + 0.05x_2 \leq 200$ - на 20. Получим:

$$f(X) = 14x_1 + 18x_2 \to min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_2 \geq 150 \\ x_1 + x_2 \leq 300 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 1350 \\ x_1 + x_2 \leq 4000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

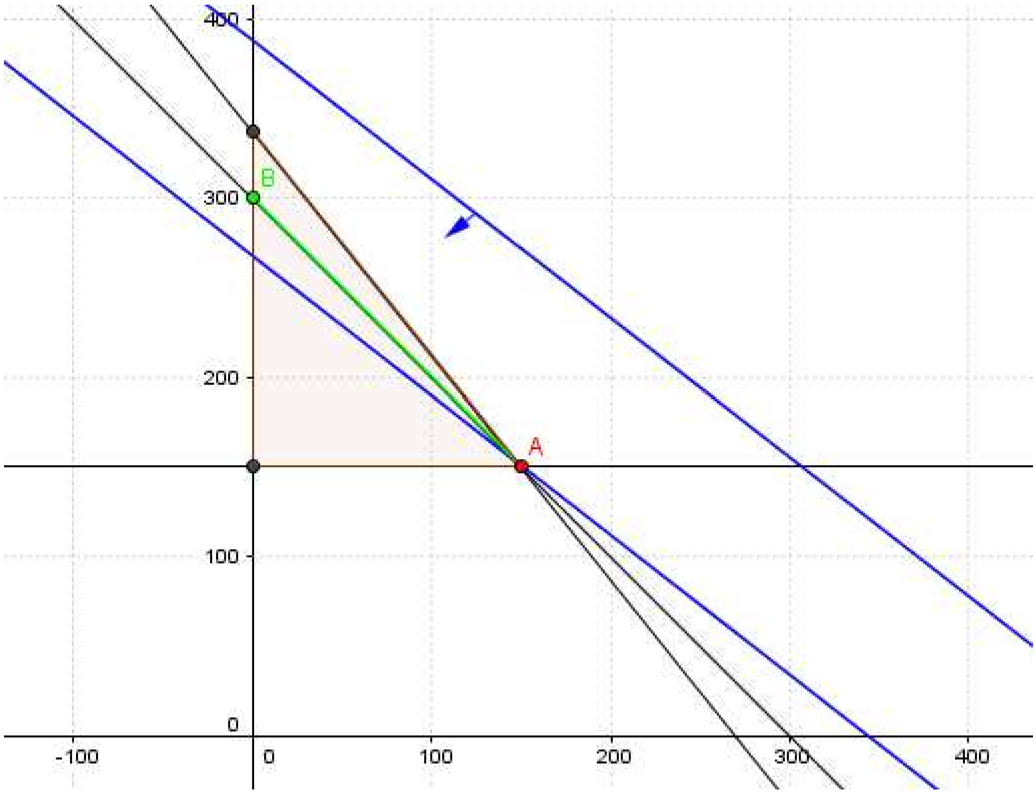
Так как выполнение условия $x_1 + x_2 = 300$ автоматически обеспечит выполнение условий $x_1 + x_2 \leq 300$ и $x_1 + x_2 \leq 4000$, то полученная задача эквивалентна задаче:

$$f(X) = 14x_1 + 18x_2 \to min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_2 \geq 150 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 1350 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решим полученную задачу графически. Построим область допустимых решений. Так как одно из ограничений - равенство, область допустимых решений - часть прямой $x_1 + x_2 = 300$, удовлетворяющая остальным ограничениям. На рисунке ниже изображена область, соответствующая точкам $(x_1; x_2)$, удовлетворяющим ограничениям-неравенствам, и выделена область допустимых решений задачи - отрезок AB прямой $x_1 + x_2 = 300$:



Построим линию уровня $14x_1 + 18x_2 = 7000$ и будем перемещать ее в направлении, противоположном вектору градиента $\bar{c} = -grad\ f = -(14; 18) = (-14;\ -18)$. Последняя точка отрезка AB, которую при этом пересечет линия уровня - точка оптимального решения:



Итак, точка оптимального решения - точка A. Это точка пересечения прямых $x_2 = 150$ и $x_1 + x_2 = 300$, ее координаты - $A(150; 150)$. Итак, оптимальное решение:

$$x_1 = 150; x_2 = 150;\ \ f(X) = 14 \cdot 150 + 18 \cdot 150 = 4800$$

Ответ. Для выполнения контракта с наименьшими затратами цеху следует ежедневно поставлять 150 кг пшеничной и 150 кг ржаной муки. Затраты при этом составят 4800 руб.

Задача 2.

Для производственной функции $Y = F(K, L) = 5K^{0.7} \cdot L^{0.6}$ определить оптимальное соотношение факторов K, L в предположении, что цены использования факторов равны $C_K = 5$ и $C_L = 2$ соответственно. Найти эластичности выпуска Y по производственным факторам; найти нормы замещения одного фактора другим.

Решение.

Оптимальное соотношение факторов.

Оптимальное соотношение факторов определяется равенством предельной производительности цене фактора (предельным издержкам):

$$MRP_K = \frac{dY}{dK} = C_K;\ \ MRP_L = \frac{dY}{dL} = C_L$$

Находим предельные производительности:

$$\frac{dY}{dK}=\frac{d}{dK}(5K^{0.7}\cdot L^{0.6})=5\cdot 0.7K^{0.7-1}\cdot L^{0.6}=3.5\cdot\frac{L^{0.6}}{K^{0.3}}$$

$$\frac{dY}{dL}=\frac{d}{dL}(5K^{0.7}\cdot L^{0.6})=5\cdot 0.6\cdot L^{0.6-1}\cdot K^{0.7}=3\cdot\frac{K^{0.7}}{L^{0.4}}$$

Получаем соотношение:

$$\begin{cases}3.5\cdot\dfrac{L^{0.6}}{K^{0.3}}=5\\ 3\cdot\dfrac{K^{0.7}}{L^{0.4}}=2\end{cases}\to\ \begin{cases}K^{0.3}=0.7L^{0.6}\\1.5K^{0.7}=L^{0.4}\end{cases}\to\begin{cases}K^{0.3}=0.7L^{0.6}\\(1.5K^{0.7})^{1.5}=(L^{0.4})^{1.5}\end{cases}\to\begin{cases}K^{0.3}=0.7L^{0.6}\\(1.5K^{0.7})^{1.5}=L^{0.6}\end{cases}$$

$$K^{0.3}=0.7\cdot 1.5^{1.5}\cdot K^{1.05}\to\ K^{0.3}(0.7\cdot 1.5^{1.5}K^{0.75}-1)=0\to\ K^{0.75}=\frac{1}{0.7\cdot 1.5^{1.5}}$$

$$K\approx 0.7151$$

$$L^{0.6}=(1.5K^{0.7})^{1.5}\to\ L\approx 1.5323$$

Эластичности.

Эластичность выпуска по капиталу показывает, на сколько процентов изменится выпуск, если основные фонды увеличить на 1%.

$$\frac{\dfrac{[5\cdot(1.01K)^{0.7}\cdot L^{0.6}]-[5K^{0.7}\cdot L^{0.6}]}{5K^{0.7}\cdot L^{0.6}}}{\dfrac{1.01K-K}{K}}=\frac{\dfrac{5K^{0.7}\cdot L^{0.6}(1.01^{0.7}-1)}{5K^{0.7}\cdot L^{0.6}}}{0.01}=100\cdot(1.01^{0.7}-1)\approx$$

$$\approx 0.6990\%$$

При изменении капитала на 1%, выпуск изменяется на 0.6990%.

Эластичность выпуска по труду показывает, на сколько процентов изменится выпуск, если число занятых увеличить на 1%.

$$\frac{\dfrac{[5\cdot K^{0.7}\cdot(1.01L)^{0.6}]-[5K^{0.7}\cdot L^{0.6}]}{5K^{0.7}\cdot L^{0.6}}}{\dfrac{1.01L-L}{L}}=\frac{\dfrac{5K^{0.7}\cdot L^{0.6}(1.01^{0.6}-1)}{5K^{0.7}\cdot L^{0.6}}}{0.01}=100\cdot(1.01^{6}-1)\approx$$

$$\approx 0.5988\%$$

При изменении труда на 1%, выпуск изменяется на 0.5988%.

Предельные нормы замещения.

Предельная норма замещения труда капиталом:

$$-\frac{dY/dK}{dY/dL}=-\frac{3.5\cdot\frac{L^{0.6}}{K^{0.3}}}{3\cdot\frac{K^{0.7}}{L^{0.4}}}=-\frac{7}{6}\cdot\frac{L}{K}=-\frac{7}{6}\cdot\frac{1.5323}{0.7151}\approx-2.5000$$

Предельная норма замещения капитала трудом:

$$-\frac{dY/dL}{dY/dK}=-\frac{3\cdot\frac{K^{0.7}}{L^{0.4}}}{3.5\cdot\frac{L^{0.6}}{K^{0.3}}}=-\frac{6}{7}\cdot\frac{K}{L}=-\frac{6}{7}\cdot\frac{0.7151}{1.5323}\approx-0.4000$$

Задача 3.

Предпочтения некоторого потребителя описываются функцией полезности $U(x_1,x_2)=4x_1^{0.5}\cdot x_2^{0.7}$, где x_1 – количество первого блага в потребительском наборе, x_2 – количество второго блага в этом же наборе. Цена первого блага равна $C_1=4$ денежных единиц, цена второго блага равна $C_2=3$ денежных единиц, доход потребителя составляет $M=600$ денежных единиц. В предположении, что потребитель весь доход расходует только на покупку этих двух благ, определить какое количество первого и второго блага следует покупать потребителю, чтобы достичь максимального уровня полезности?

Решение.

Требуется найти максимум функции $U(x_1,x_2)=4x_1^{0.5}\cdot x_2^{0.7}$ при условии $4x_1+3x_2=600$.

Выразим из уравнения связи переменную x_1: $x_1=\frac{1}{4}(600-3x_2)=150-\frac{3}{4}x_2$. Подставим выражение для x_1 в функцию полезности, получим функцию одной переменной:

$$U(x_2)=4\left(150-\frac{3}{4}x_2\right)^{0.5}\cdot x_2^{0.7}$$

Минимальное количество второго блага равно 0, максимальное - $\frac{600}{3}=200$. Найдем наибольшее значение функции $U(x_2)$ на отрезке $[0;200]$.

$$U'=4\cdot0.5\cdot\left(150-\frac{3}{4}x_2\right)^{-0.5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot x_2^{0.7}+4\left(150-\frac{3}{4}x_2\right)^{0.5}\cdot0.7x_2^{-0.3}=$$

$$=-\frac{1.5x_2^{0.7}}{\left(150-\frac{3}{4}x_2\right)^{0.5}}+\frac{2.8\left(150-\frac{3}{4}x_2\right)^{0.5}}{x_2^{0.3}}=\frac{2.8(150-0.75x_2)-1.5x_2}{x_2^{0.3}\left(150-\frac{3}{4}x_2\right)^{0.5}}=$$

$$=\frac{420-3.6x_2}{x_2^{0.3}\left(150-\frac{3}{4}x_2\right)^{0.5}}$$

$$U'=0\rightarrow\ 420-3.6x_2\rightarrow\ x_2=\frac{350}{3}\approx116.6667$$

Найдем значение функции $U(x_2)$ на краях отрезка: $x_2 = 0, x_2 = 200$ и в критической точке $x_2 = 350/3$.

$$U(x_2 = 0) = 4\left(150 - \frac{3}{4} \cdot 0\right)^{0.5} \cdot 0 = 0$$

$$U(x_2 = 560) = 4\left(150 - \frac{3}{4} \cdot \frac{350}{3}\right)^{0.5} \cdot \left(\frac{350}{3}\right)^{0.7} = 4\left(\frac{125}{2}\right)^{0.5} \cdot \left(\frac{350}{3}\right)^{0.7} \approx 884.8359$$

$$U(x_2 = 200) = 4\left(150 - \frac{3}{4} \cdot 200\right)^{0.5} \cdot 200^{0.7} = 0$$

Наибольшее из полученных значений достигается в точке $x_2 = 350/3$. Тогда оптимальные количества благ:

$$x_1^* = 150 - \frac{3}{4} \cdot \frac{350}{3} = \frac{125}{2}; \;\; x_2^* = \frac{350}{3}; \; U^* = \; U\left(\frac{125}{2}; \frac{350}{3}\right) \approx 884.8359$$

Ответ. 125/2 единиц первого блага; 350/3 единиц второго блага.