Контрольная работа
Дифференциальные уравнения
Вариант 5

Решить уравнения:

1. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$.

Решение:

Преобразуем уравнение:

$$y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0 \quad\Rightarrow\quad y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}=-1 \quad\Rightarrow\quad -\frac{y'y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Уравнение с разделяющимися переменными:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-y^2\right)}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}\frac{\left(1-y^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}=\arcsin x-C \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{1-y^2}+\arcsin x=C.$$

Ответ: $\sqrt{1-y^2}+\arcsin x=C$.

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x^2}+4\dfrac{y}{x}+2$.

Решение:

Так как $\dfrac{dy}{dx}=y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, то заданное уравнение однородно. Делаем замену $y=xu$, тогда $y'=u+xu'$, $\dfrac{y}{x}=u$. Подставим в исходное уравнение:

$$u+xu'=u^2+4u+2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{du}{dx}=\frac{u^2+3u+2}{x}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируем:

$$\int \frac{du}{u^2+3u+2} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{\left(u+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \ln|x| + \ln C, \quad C>0 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{d\left(u+\frac{3}{2}\right)}{\left(u+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \ln|x| + \ln C \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} \ln\left|\frac{\left(u+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(u+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right| = \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{u+1}{x(u+2)}\right| = \ln C \quad \Rightarrow \quad \frac{u+1}{x(u+2)} = \pm C.$$

Так как $C>0$, то $\pm C \neq 0$. Если $u = \frac{y}{x} = -1 \Leftrightarrow y = -x$ (непосредственной подстановкой убеждаемся, что это решение заданного уравнения), то получим, что $C=0$. Значит, можно записать так:

$$\frac{u+1}{x(u+2)} = C, \qquad C \in R.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\frac{u+1}{x(u+2)} = C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{y}{x}+1}{x\left(\frac{y}{x}+2\right)} = C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y+x}{x(y+2x)} = C.$$

Ответ: $\frac{y+x}{x(y+2x)} = C$.

3. $\left(y^2 + y\sec^2 x\right)dx + (2xy + tgx)dy = 0$.

Решение:

Имеем уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Проверим условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + y\sec^2 x\right) = 2y + \sec^2 x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + tgx) = 2y + \frac{1}{\cos^2 x} = 2y + \sec^2 x .$$

Условие выполнено, значит, имеем уравнение в полных дифференциалах. То есть, существует такая функция $F(x, y)$, что дифференциал ее равен

$$dF = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 .$$

Тогда общее решение можно записать в виде $F(x, y) = C$.

С другой стороны полный дифференциал равен $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$. Значит, можно составить систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = P = y^2 + y\sec^2 x \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + tgx \end{cases} .$$

Интегрируем первое уравнение:

$$F(x, y) = \int (y^2 + y\sec^2 x)dx = y^2 x + ytgx + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ − функция, зависящая лишь от y.

Продифференцируем полученное выражение по y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + tgx + \varphi'(y) = 2xy + tgx \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y) = C_1 .$$

Таким образом, искомое решение выглядит так:

$$F(x, y) = y^2 x + ytgx + C_1 = C \Leftrightarrow y^2 x + ytgx = C .$$

Ответ: $y^2 x + ytgx = C$.

4. Решить задачу Коши: $y' + y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = 0$.

Решение:

Имеем линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Умножим обе части на множитель

$$e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x} :$$

$$y'e^{\sin x}+ye^{\sin x}\cos x=e^{\sin x}\sin 2x.$$

Слева получили производную по x от функции $ye^{\sin x}$:

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\sin x}\right)=y'e^{\sin x}+ye^{\sin x}\cos x=e^{\sin x}\sin 2x=2e^{\sin x}\sin x\cos x \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad d\left(ye^{\sin x}\right)=2e^{\sin x}\sin x\cos xdx \quad\Rightarrow\quad ye^{\sin x}=2\int e^{\sin x}\sin x\cos xdx=$$

$$=\begin{bmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos xdx \end{bmatrix}=2\int e^t tdt=\begin{bmatrix} u=t, dv=e^t dt \\ du=dt, v=e^t \end{bmatrix}=2te^t-2\int e^t dt=2te^t-2e^t+C=$$

$$=2e^{\sin x}\sin x-2e^{\sin x}+C \quad\Rightarrow\quad y(x)=2\sin x-2+Ce^{-\sin x}.$$

Константу найдем из начального условия:

$$y(0)=2\sin 0-2+C\cdot e^{-\sin 0}=-2+C=0 \quad\Rightarrow\quad C=2.$$

Ответ: $y(x)=2\sin x-2+2e^{-\sin x}$.

5. Решить уравнение $x^2y''+xy'=1$.

Решение:

Сделаем замену $z=y'$, тогда $y''=z'$. Подставим в уравнение:

$$x^2z'+xz=1 \quad\Rightarrow\quad z'+\frac{1}{x}z=\frac{1}{x^2}.$$

Получили линейное уравнение первого порядка. Умножим обе части на множитель

$$e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x:$$

$$xz'+z=\frac{1}{x}.$$

Слева получили производную по x от xz:

$$\frac{d}{dx}(xz)=xz'+z=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow d(xz)=\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad xz=\int\frac{dx}{x}=\ln x+C \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Вернемся к исходной функции:

$$y = \int y' dx = \int z dx = \int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x} \right) dx = \int \ln x d(\ln x) + C \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln^2 x + C \ln x + C_1.$$

Ответ: $y(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C \ln x + C_1$.

6. Решить уравнение

$$y^V - 2y^{IV} = 2x + 3.$$

Решение:

Имеем ЛНДУ пятого порядка. Его общее решение ищем в виде суммы

$$y = \bar{y} + \tilde{y},$$

где $\bar{y}$ − общее решение соответствующего ЛОДУ $y^V - 2y^{IV} = 0$, $\tilde{y}$ − одно из частных решений заданного ЛНДУ.

Найдем $\bar{y}$, для чего вычислим корни характеристического уравнения:

$$k^5 - 2k^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^4(k-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k = 0 \\ k_5 = 2 \end{cases}.$$

Получили два вещественных корня: первый кратности 4 и второй однократный. Значит, общее решение ЛОДУ выглядит так:

$$\bar{y} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} + C_3 x^2 e^{kx} + C_4 x^3 e^{kx} + C_5 e^{k_5 x} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{2x}.$$

Так как правая часть заданного ЛНДУ представляет собой многочлен первой степени, то частное решение будем искать в виде

$$\tilde{y} = (ax + b) x^r,$$

где r − число корней характеристического уравнения, равных нулю. В нашем случае $r = 4$, значит, частное решение выглядит так:

$$\tilde{y} = (ax + b) x^4 = ax^5 + bx^4.$$

Вычисляем производные:

$$\tilde{y}' = 5ax^4 + 4bx^3, \quad \tilde{y}'' = 20ax^3 + 12bx^2, \quad \tilde{y}''' = 60ax^2 + 24bx,$$

$$\tilde{y}^{VI} = 120ax + 24b, \quad \tilde{y}^{V} = 120a.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$120a - 2(120ax + 24b) = 2x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad -240ax + 120a - 48b = 2x + 3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -240a = 2 \\ 120a - 48b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{120} \\ b = -\dfrac{4}{48} = -\dfrac{1}{12} \end{cases}.$$

Частное решение:

$$\tilde{y} = -\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{12}x^4.$$

Искомое общее решение:

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^{2x} - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{12}x^4.$$

Ответ: $y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^{2x} - \dfrac{1}{120}x^5 - \dfrac{1}{12}x^4$.

7. Решить уравнение

$$y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}.$$

Решение:

Имеем ЛНДУ второго порядка.

Найдем $\bar{y}$, для чего отыщем корни характеристического уравнения:

$$k^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 4i.$$

Получили комплексно-сопряженные корни $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\alpha = 0, \beta = 4$), значит, общее решение ЛОДУ выглядит так:

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Правая часть представляет собой сумму, поэтому частное решение ищем в виде суммы:

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2,$$

где $\tilde{y}_1$ − частное решение уравнения $y''+16y=16\cos 4x$, $\tilde{y}_2$ − частное решение уравнения $y''+16y=-16e^{4x}$.

Правая часть первого уравнения представляет собой функцию $f_1=A_1\cos\beta x+B_1\sin\beta x$, ($A_1=16, B_1=0, \beta=4$) значит, частное решение ищем в виде $\tilde{y}_1=(a\cos\beta x+b\sin\beta x)x^r=(a\cos 4x+b\sin 4x)x^r$, где r − число корней характеристического уравнения, равных $\pm\beta i=\pm 4i$. В нашем случае $r=1$, значит,

$$\tilde{y}_1=(a\cos 4x+b\sin 4x)x=ax\cos 4x+bx\sin 4x.$$

Вычисляем производные:

$$\tilde{y}_1'=a\cos 4x-4ax\sin 4x+b\sin 4x+4bx\cos 4x=$$

$$=(4bx+a)\cos 4x+(-4ax+b)\sin 4x,$$

$$\tilde{y}_1''=4b\cos 4x-4(4bx+a)\sin 4x-4a\sin 4x+4(-4ax+b)\cos 4x=$$

$$=(-16ax+8b)\cos 4x+(-16bx-8a)\sin 4x.$$

Подставим в уравнение:

$$(-16ax+8b)\cos 4x+(-16bx-8a)\sin 4x+16(ax\cos 4x+bx\sin 4x)=16\cos 4x \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 8b\cos 4x-8a\sin 4x=16\cos 4x \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}.$$

Первое частное решение выглядит так:

$$\tilde{y}_1=2x\sin 4x.$$

Правая часть второго уравнения выглядит так $f_2=Ae^{\alpha x}, (A=-16, \alpha=4)$, значит, частное решение его будем искать в виде $\tilde{y}_2=ae^{\alpha x}x^r$, где r − число корней, равных α. В нашем случае $r=0$, поэтому частное решение выглядит так:

$$\tilde{y}_2=ae^{4x}.$$

Вычисляем производные:

$$\tilde{y}_2'=4ae^{4x},\quad \tilde{y}_2''=16ae^{4x}.$$

Подставим в уравнение:

$$16ae^{4x}+16ae^{4x}=-16e^{4x} \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{1}{2}.$$

Значит, $\tilde{y}_2=-\frac{1}{2}e^{4x}$. Частное решение заданного уравнения:

$$\tilde{y}=2x\sin 4x-\frac{1}{2}e^{4x}.$$

Искомое общее решение заданного уравнения:

$$y(x)=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+2x\sin 4x-\frac{1}{2}e^{4x}.$$

Ответ: $y(x)=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+2x\sin 4x-\frac{1}{2}e^{4x}$.

8. Решить уравнение

$$y''+9y=\frac{9}{\sin 3x}.$$

Решение:

Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ, для чего вычислим корни характеристического уравнения:

$$k^2+9=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=\pm 3i.$$

Значит, общее решение является линейной комбинацией следующих функций:

$$y_1=\cos 3x, \quad y_2=\sin 3x.$$

Общее решение ЛОДУ:

$$\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2.$$

Далее варьируем постоянные: положим константы функциями от x. То есть, искомое общее решение ищем в виде:

$$y(x)=u(x)y_1+v(x)y_2.$$

Функции u,v находим из системы:

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y_1' + v'y_2' = f = \dfrac{9}{\sin 3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'\cos 3x + v'\sin 3x = 0 \\ -3u'\sin 3x + 3v'\cos 3x = \dfrac{9}{\sin 3x} \end{cases}.$$

Из первого уравнения находим:

$$v' = -u'\frac{\cos 3x}{\sin 3x}.$$

Подставим во второе уравнение:

$$-3u'\sin 3x - 3u'\frac{\cos^2 3x}{\sin 3x} = \frac{9}{\sin 3x} \quad \Rightarrow \quad -3u' = 9 \quad \Rightarrow \quad u' = -3 \quad \Rightarrow \quad u(x) = -3x + c_1.$$

Находим функцию v:

$$v' = -u'\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{3\cos 3x}{\sin 3x} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int \frac{3\cos 3x dx}{\sin 3x} = \int \frac{d(\sin 3x)}{\sin 3x} = \ln|\sin 3x| + c_2.$$

Искомое решение:

$$y(x) = (-3x + c_1)\cos 3x + (\ln|\sin 3x| + c_2)\sin 3x.$$

Ответ: $y(x) = (-3x + c_1)\cos 3x + (\ln|\sin 3x| + c_2)\sin 3x$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x, \quad y(0) = 1, y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

Решение:

Найдем общее решение в виде суммы общего решения однородного уравнения и одного из частных решений.

Вычислим корни характеристического уравнения:

$$k^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm i.$$

Значит, общее решение однородного уравнения выглядит так:

$$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение ищем в виде:

$$\tilde{y}(x) = a\cos 3x + b\sin 3x.$$

Вычислим производные:

$$\tilde{y}'(x) = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x,$$

$$\tilde{y}''(x) = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x.$$

Подставим в исходное уравнение

$$-9a\cos 3x - 9b\sin 3x + a\cos 3x + b\sin 3x = 2\cos 3x - 3\sin 3x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -8a = 2 \\ -8b = -3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{3}{8} \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение выглядит так:

$$\tilde{y}(x) = -\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{8}\sin 3x.$$

Общее решение заданного уравнения:

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{8}\sin 3x.$$

Константы находим из краевых условий:

$$y(0) = C_1 - \frac{1}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{5}{4},$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = -\frac{7}{8} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{7}{4\sqrt{3}}.$$

Ответ: $y(x) = \dfrac{5}{4}\cos x - \dfrac{7}{4\sqrt{3}}\sin x - \dfrac{1}{4}\cos 3x + \dfrac{3}{8}\sin 3x$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи:

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Решение:

Пусть $\lambda = 0$, тогда получим уравнение $y'' = 0 \Leftrightarrow y = c_1x + c_2$. Из граничных условий получаем систему

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Таким образом, для собственного значения $\lambda = 0$ получим собственную функцию $y = 0$.

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда общее решение уравнения выглядит так

$$y = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Найдем константы из граничных условий:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ \sin \lambda = 0 \end{cases}.$$

Из второго уравнения системы получим $\lambda_k = \pi k, \quad k \in Z / \{0\}$. Это и есть собственные значения заданной задачи. Соответствующие собственные функции равны:

$$y(x) = C_1 \cos \lambda_k x + C_2 \sin \lambda_k x = C_2 \sin \pi k x.$$

Значит, собственные функции равны $y_k(x) = \sin \pi k x$.

Заметим, что ранее полученный результат при $\lambda = 0$ охватывается и этими формулами. Окончательно можем записать

Ответ: $\lambda_k = \pi k, \quad y_k = \sin \pi k x, \quad k \in Z$.

11. Решить уравнение $y'' - xy' + xy = 0$.

Решение:

Заданное уравнение – уравнение Штурма – Лиувилля. Для решения необходимо знать (или подобрать) одно частное решение. К сожалению, ничего не подбирается. Возможно, требуется уточнение у преподавателя.

12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 2e^x \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - 3e^{4x} \end{cases}.$$

Решение:

Выразим из второго уравнения y_1:

$$y_1 = y_2' - 2y_2 + 3e^{4x}.$$

Дифференцируем:

$$y_1' = y_2'' - 2y_2' + 12e^{4x}.$$

Подставим полученные результаты в первое уравнение:

$$y_2'' - 2y_2' + 12e^{4x} = 2\left(y_2' - 2y_2 + 3e^{4x}\right) + y_2 + 2e^{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y_2'' - 4y_2' + 3y_2 = 2e^{x} - 6e^{4x}.$$

Получили ЛНДУ второго порядка. Найдем его общее решение:

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = \dfrac{4 - \sqrt{16-12}}{2} = 1 \\ k_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3 \end{cases}.$$

Значит, общее решение ЛОДУ выглядит так:

$$\bar{y}_2 = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}.$$

Частное решение ищем в виде суммы $\tilde{y}_2 = \tilde{y}_{21} + \tilde{y}_{22}$, где $\tilde{y}_{21}$ - частное решение уравнения $y_2'' - 4y_2' + 3y_2 = 2e^{x}$, $\tilde{y}_{22}$ − частное решение уравнения $y_2'' - 4y_2' + 3y_2 = -6e^{4x}$.

Частное решение первого уравнения ищем в виде

$$\tilde{y}_{21} = ae^{x} \cdot x.$$

Вычислим производные:

$$\tilde{y}_{21}' = ae^{x} + axe^{x},$$

$$\tilde{y}_{22}'' = 2ae^{x} + axe^{x}.$$

Подставим в уравнение:

$$2ae^{x} + axe^{x} - 4\left(ae^{x} + axe^{x}\right) + 3axe^{x} = 2e^{x} \quad \Rightarrow \quad a = -1.$$

Значит, первое частное решение равно $\tilde{y}_{21} = -e^{x} \cdot x$.

Второе частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}_{22} = be^{4x}.$$

Производные равны: $\tilde{y}'_{22} = 4be^{4x}$, $\tilde{y}''_{22} = 16be^{4x}$. Подставим в уравнение:

$$16be^{4x} - 16be^{4x} + 3be^{4x} = -6e^{4x} \quad \Rightarrow \quad b = -2.$$

Значит, второе частное решение выглядит так:

$$\tilde{y}_{22} = -2e^{4x}.$$

Частное решение равно сумме частных решений:

$$\tilde{y}_2 = -xe^x - 2e^{4x}.$$

Таким образом, вторая функция выглядит так:

$$y_2(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} - xe^x - 2e^{4x}.$$

Вычислим ее производную:

$$y'_2 = C_1e^x + 3C_2e^{3x} - e^x - xe^x - 8e^{4x}.$$

Находим первую функцию:

$$y_1 = y'_2 - 2y_2 + 3e^{4x} = C_1e^x + 3C_2e^{3x} - e^x - xe^x - 8e^{4x} -$$

$$-2\left(C_1e^x + C_2e^{3x} - xe^x - 2e^{4x}\right) + 3e^{4x} = \left(-C_1 - 1 + x\right)e^x + C_2e^{3x} - e^{4x}.$$

Ответ: $\begin{cases} y_1(x) = \left(-C_1 - 1 + x\right)e^x + C_2e^{3x} - e^{4x} \\ y_2(x) = \left(C_1 - x\right)e^x + C_2e^{3x} - 2e^{4x} \end{cases}.$