Контрольная работа. Производная функции

Задание 1. Вычислить производную функции

А) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

Б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt[6]{\dfrac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}}\right)$

В) $y=\left(x^2+1\right)arctgx\ln(x^2+1)$

Г) $y=(\sin x)^x$

Решение.

Для решения данных задач будем пользоваться формулами

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2};(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$$

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1};(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

А)

$$y'=\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$$

Б)

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt[6]{\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right)=\frac{\ln\left(x^3+\sqrt{5}\right)-\ln\left(x^3-\sqrt{5}\right)}{6\sqrt{5}}$$

$$y'=\left(\frac{\ln\left(x^3+\sqrt{5}\right)-\ln\left(x^3-\sqrt{5}\right)}{6\sqrt{5}}\right)'=\frac{1}{6\sqrt{5}}\left(\frac{3x^2}{x^3+\sqrt{5}}-\frac{3x^2}{x^3-\sqrt{5}}\right)=\frac{3x^2}{6\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^3+\sqrt{5}}-\frac{1}{x^3-\sqrt{5}}\right)=$$

$$=\frac{3x^2}{6\sqrt{5}}\left(\frac{x^3-\sqrt{5}-x^3-\sqrt{5}}{\left(x^3+\sqrt{5}\right)\left(x^3-\sqrt{5}\right)}\right)=\frac{3x^2}{6\sqrt{5}}\left(\frac{-2\sqrt{5}}{x^6-5}\right)=-\frac{x^2}{x^6-5}$$

В)

$$y'=\left[\left(x^2+1\right)arctgx\ln(x^2+1)\right]'=\left[\left(x^2+1\right)\right]'arctgx\ln(x^2+1)+\left(x^2+1\right)\left[arctgx\right]'\ln(x^2+1)+$$

$$+\left(x^2+1\right)arctgx\left[\ln(x^2+1)\right]'=2xarctgx\ln(x^2+1)+\left(x^2+1\right)\frac{1}{x^2+1}\ln(x^2+1)+\left(x^2+1\right)arctgx\frac{2x}{x^2+1}=$$

$$=2xarctgx\ln(x^2+1)+\ln(x^2+1)+2xarctgx$$

Г) $y=\left(\sin x\right)^x$

Воспользуемся логарифмической производной

$$y=\left(\sin x\right)^x$$

$$\ln y=x\ln\sin x$$

$$\left(\ln y\right)'=\left(x\ln\sin x\right)'$$

$$\frac{y'}{y}=x'\ln\sin x+x\left(\ln\sin x\right)'$$

$$\frac{y'}{y}=\ln\sin x+x\frac{\sin x}{\cos x}=\ln\sin x+xtgx$$

$$y'=\left(\sin x\right)^x\left[\ln\sin x+xtgx\right]$$

Задание 2. Найти экстремумы функции $y=x-arctgx$.

Решение. Область определения $x\in R$

Найдем экстремумы функции и интервалы монотонности

$$y'(x)=\left(x-arctgx\right)'=1-\frac{1}{1+x^2}$$

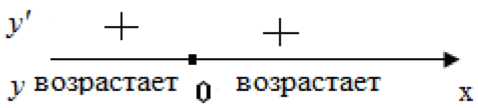
$$y'(x)=0$$

$$1-\frac{1}{1+x^2}=0$$

$$1+x^2=1$$

$$x=0$$

Изобразим на координатной прямой



Значит, функция возрастает на всей области определения, точек экстремума нет.

Ответ: точек экстремума нет

Задание 3. Исследовать функцию и построить ее график $y=\dfrac{4(x-3)}{(x-2)^2}$

Решение

1) Область определения функции $D(f): x-2\neq 0 \Rightarrow D(f): x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

2) Найдем точки пересечения с осью ОХ

$$\frac{4(x-3)}{(x-2)^2}=0$$

$x=3$, значит точка пересечения с осью ОХ - $(3,0)$

Найдем точки пересечения с осью ОУ. Положим $x=0$, получим $y=\dfrac{4(0-3)}{(0-2)^2}=\dfrac{-12}{4}=-3$.

Искомая точка (0; -3).

3) Исследуем четность.

$$f(-x)=\frac{4(-x-3)}{(-x-2)^2}=-\frac{4(x+3)}{(x+2)^2}$$

Так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, данная функция не является ни четной, ни нечетной. Также она не является периодической

4) $x=2$ - точка разрыва

5) $x=2$ - вертикальная асимптота

Найдем наклонные

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4(x-3)}{(x-2)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left(1-\frac{3}{x}\right)}{(x-2)^2}=0,$$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4(x-3)}{(x-2)^2}\right)=0$, значит $y=0$ - наклонная асимптота.

6) Найдем экстремумы функции и интервалы монотонности

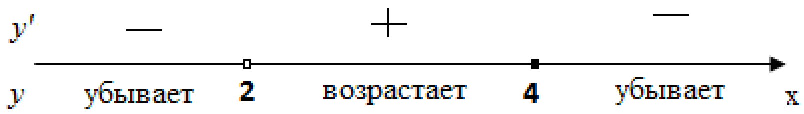
$$y'(x)=\left(\frac{4(x-3)}{(x-2)^2}\right)'=\frac{4(x-2)^2-2(x-2)4(x-3)}{(x-2)^4}=-4\frac{x-4}{(x-2)^3}$$

$$y'(x)=0$$

$$-4\frac{x-4}{(x-2)^3}=0$$

$$x=4$$

Изобразим на координатной прямой



Значит $y(x)$ убывает при $x \in (-\infty; 2); [4; +\infty)$ и возрастает при $x \in (2; 4]$.
$x = 4$ - точка максимума.

7) Найти точки перегиба и характеры выпуклости

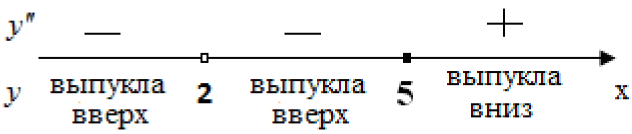
$$y''(x) = \left(-4\frac{x-4}{(x-2)^3}\right)' = -4\frac{(x-2)^3 - 3(x-2)^2(x-4)}{(x-2)^6} = -4\frac{(x-2) - 3(x-4)}{(x-2)^4} = 8\frac{x-5}{(x-2)^4}$$

$y''(x) = 0$

$$8\frac{x-5}{(x-2)^4} = 0$$

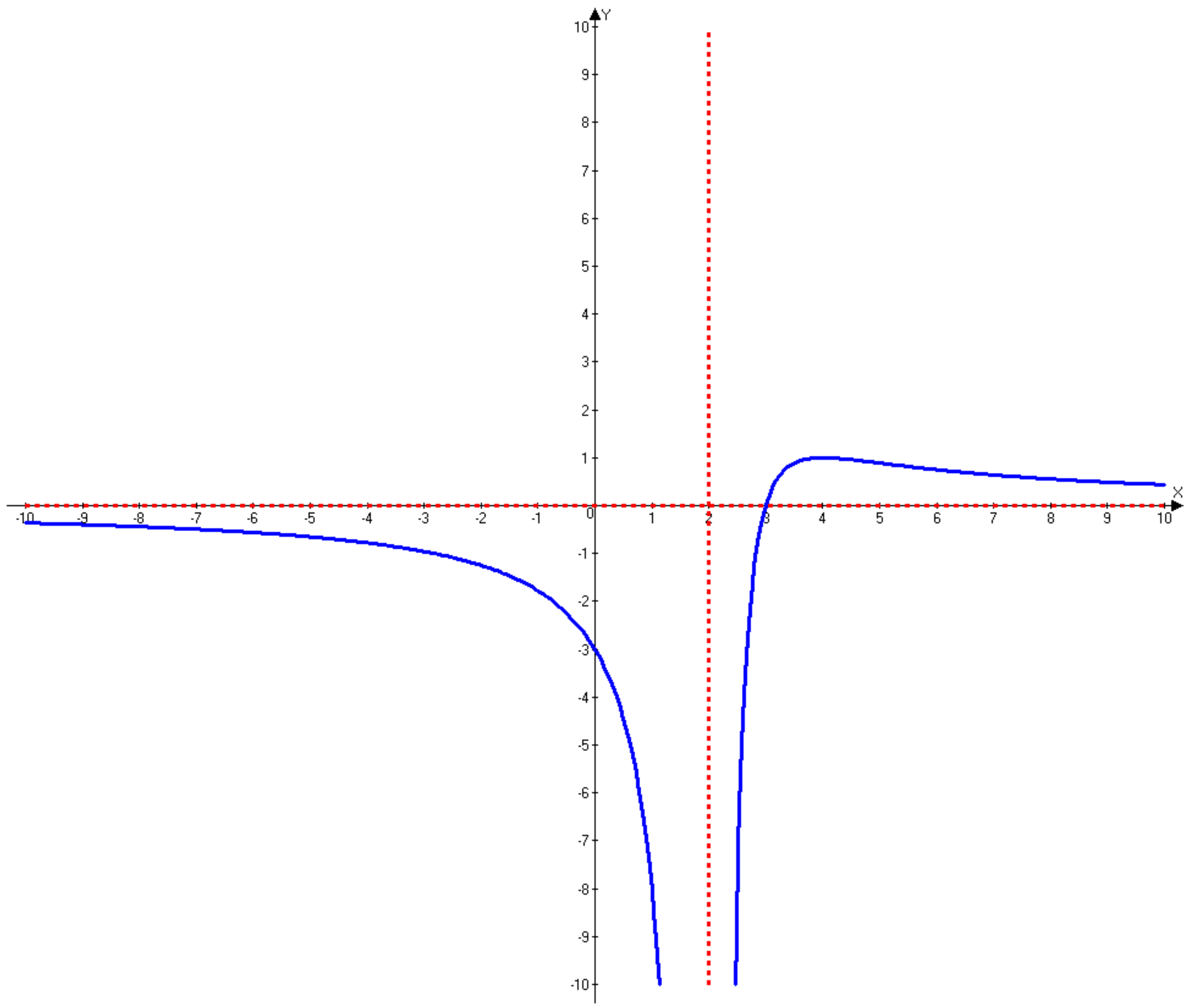
$x = 5$
корней нет.

Изобразим на координатной прямой



Значит $y(x)$ выпукла вверх при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 5]$, $y(x)$ выпукла вниз при $x \in [5; +\infty)$
$x = 5$ - точка перегиба

Построим график:


Y
X
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10