Контрольная работа по математической логике с решением

Задача 1. Определить, к каким классам Поста относится $F = \neg x1x3 \vee x1\neg x3$, добавить (если это необходимо) к F элементарные функции, чтобы полученное множество было полным.

Решение. Составим таблицу истинности для функции $F = \neg x1x3 \vee x1\neg x3$:

$x1$	$x2$	$x3$	$\neg x1$	$\neg x3$	$\neg x1x3$	$x1\neg x3$	F
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

Функция F сохраняет нуль ($F \in T_0$), так как $F(0,0,0) = 0$.

Функция F не сохраняет единицу ($F \notin T_1$), так как $F(1,1,1) = 0$.

Функция F не является монотонной ($F \notin M$), так как на сравнимых наборах $(0,0,1) \prec (1,0,1)$ получаем $F(0,0,1) = 1 > 0 = F(1,0,1)$.

Функция F не является самодвойственной ($F \notin S$), так как на противоположных наборах принимает одинаковые значения: $F(0,0,0) = F(1,1,1) = 0$.

Функция F является линейной ($F \in L$), так как ее полином имеет вид (см. задачу 4) $F = x1 + x3$.

Чтобы дополнить функцию до полной системы, нужно ввести функцию, не сохраняющую 0 и нелинейную, в качестве такой функции можно выбрать $G = x \to y$ (импликация).

Множество $\{F, G\}$ полное.

Задача 2. Представить F в форме канонического полинома.

Решение. $F = \neg x1x3 \vee x1\neg x3$
Используем таблицу истинности из задачи 2:

$x1$	$x2$	$x3$	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Пусть $F = a0 + a1x1 + a2x2 + a3x3 + a4ax1x2 + a5x1x3 + a6x2x3 + a7x1x2x3$ - вид канонического полинома. Найдем коэффициенты $ai,\ i = 0,...,7$.

Набор (0,0,0), $F(0,0,0) = a0 = 0$.
Набор (0,0,1), $F(0,0,1) = a3 = 1$.
Набор (0,1,0), $F(0,1,0) = a2 = 0$.
Набор (1,0,0), $F(1,0,0) = a1 = 1$.
Набор (0,1,1), $F(0,1,1) = 1 + a6 = 1, a6 = 0$.
Набор (1,0,1), $F(1,0,1) = 1 + 1 + a5 = a5 = 0$.
Набор (1,1,0), $F(1,1,0) = 1 + a4 = 1, a4 = 0$.
Набор (1,1,1), $F(1,1,1) = 1 + 1 + a7 = a7 = 0$, $a7 = 0$.

Получили вид полинома: $F = x1 + x3$.

Задача 3. Упростите выражение
$((A \vee (C \vee (B \& C))) \& \neg(C \& D) \& (C \& \neg D)) \& (C \vee (\neg D \& \neg C) \vee D)$

Решение. Упрощаем выражение (будем для удобства обозначать $\neg x = \overline{x}$):

$$
\begin{aligned}
&((A \vee (C \vee (B \& C))) \& \neg(C \& D) \& (C \& \neg D)) \& (C \vee (\neg D \& \neg C) \vee D) = \\
&= \left[(A \vee (C \vee (B \& C))) \& \overline{(C \& D)} \& (C \& \overline{D}) \right] \& (C \vee (\overline{D} \& \overline{C}) \vee D) = \\
&= \left[(A \vee C \vee (B \& C)) \& (\overline{C} \vee \overline{D}) \& (C \& \overline{D}) \right] \& ((C \vee \overline{D}) \& (C \vee \overline{C}) \vee D) = \\
&= \left[(A \vee C \vee (B \& C)) \& ((\overline{C} \& C \& \overline{D}) \vee (\overline{D} \& C \& \overline{D})) \right] \& ((C \vee \overline{D}) \vee D) = \\
&= \left[(A \vee C \vee (B \& C)) \& (C \& \overline{D}) \right] = (A \vee C \vee (B \& C)) \& (C \& \overline{D}) = \\
&= (A \& C \& \overline{D}) \vee (C \& C \& \overline{D}) \vee (B \& C \& C \& \overline{D}) = \\
&= (A \& C \& \overline{D}) \vee (C \& \overline{D}) \vee (B \& C \& \overline{D}) = (A \& C \& \overline{D}) \vee (C \& \overline{D}).
\end{aligned}
$$