

## ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ: ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ И ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

**Моменты плоской кривой**

Для плоской кривой  $L$  статические моменты  $M_x, M_y$  относительно осей  $Ox, Oy$  вычисляются по формулам

$$M_x = \int_L y dl, \quad M_y = \int_L x dl.$$

Моменты инерции  $I_x, I_y$  и  $I_0$  относительно осей  $Ox, Oy$  и начала координат вычисляются по формулам

$$I_x = \int_L y^2 dl, \quad I_y = \int_L x^2 dl, \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2) dl.$$

Если кривая задана явным уравнением  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , то в этих формулах  $dl$  надо заменить на  $\sqrt{1 + y'^2} dx$ . Если кривая задана параметрически:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , то в этих формулах  $dl$  надо заменить на  $\sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ .

**Моменты плоской фигуры**

Для плоской фигуры, ограниченной кривыми  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$  ( $y_1 \leq y_2$ ) и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a \leq b$ ) статические моменты выражаются формулами

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx, \quad M_y = \int_a^b x(y_2 - y_1) dx.$$

Моменты инерции  $I_x, I_y, I_0$  плоской фигуры  $D$  относительно осей координат  $Ox, Oy$  и начала координат (полярный момент инерции) вычисляются по формулам

$$I_x = \iint_D y^2 dy dx, \quad I_y = \iint_D x^2 dy dx, \quad I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dy dx.$$

**Моменты объемного тела**

Для объемного тела  $V$  моменты инерции  $I_x, I_y, I_z, I_0$  относительно осей координат  $Ox, Oy, Oz$  и начала координат вычисляются по формулам

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) dv, \quad I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) dv, \quad I_z = \iiint_V (y^2 + x^2) dv, \quad I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv.$$

Для объемного тела  $V$  моменты инерции  $I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$  относительно координатных плоскостей  $xOy, yOz, xOz$  вычисляются по формулам

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 dv, \quad I_{yz} = \iiint_V x^2 dv, \quad I_{xz} = \iiint_V y^2 dv.$$

### Центр тяжести

Центр тяжести плоской кривой  $L$  имеет координаты  $x_c = M_y/l$ ,  $y_c = M_x/l$ , где  $l$  — длина кривой  $L$ .

Центр тяжести плоской фигуры имеет координаты  $x_c = M_y/S$ ,  $y_c = M_x/S$ , где  $S$  — площадь фигуры.

Центр тяжести объемного тела имеет координаты

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_V x \, dv, \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_V y \, dv, \quad z_c = \frac{1}{V} \iiint_V z \, dv,$$

где  $V$  — объем тела.