Вариационное исчисление: решение задачи с второй производной

Задание. *Решить задачу со старшими производными.*

14. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 + 4x^2)\, dt \to \text{extr}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(\pi) = \text{sh}(\pi).$

Решение.

1. Запишем необходимое условие экстремума первого порядка – уравнение Эйлера-Пуассона:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k f_{x^{(k)}} = 0.$$

В нашем случае уравнение примет вид:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 f_{\ddot{x}} = 0;$$

$$8x + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 2\ddot{x} = 0;$$

$$\ddot{\ddot{x}} + 4x = 0.$$

2. Общее решение уравнения Эйлера-Пуассона:

$$x(t) = C_1 e^{-t} \sin t + C_2 e^{t} \sin t + C_3 e^{-t} \cos t + C_4 e^{t} \cos t\ .$$

Из условия $x(0) = 0$ $C_3 + C_4 = 0$. Из условия $\dot{x}(0) = 0$ $C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0$. Из условия $\dot{x}(\pi) = sh\pi$ вытекает равенство

$$-C_1 e^{-\pi} - C_2 e^{\pi} + C_3 e^{-\pi} - C_4 e^{\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}.$$

Приравнивая коэффициенты перед e^{π} и $e^{-\pi}$, получаем еще два условия.

$$C_3 - C_1 = -1/2; \qquad -C_2 - C_4 = 1/2.$$

Для нахождения коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 решим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_3 + C_4 = 0; \\ C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0; \\ C_3 - C_1 = -1/2; \\ -C_2 - C_4 = 1/2. \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Поскольку $\det A = 0$, то система решений не имеет. А значит, экстремалей нет.

Ответ: экстремалей нет.