Задача с решением по вариационному исчислению
скачана с https://www.matburo.ru/ex_dr_all.php?p1=vi
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Вариационное исчисление: решение изопериметрической задачи

ЗАДАНИЕ. *Решить изопериметрическую задачу.*

$$10.\quad \int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr},\quad \int_0^1 x\,dt = 3,\quad x(0) = 1,\quad x(1) = 6.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Для лагранжиана задачи $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x$ выпишем необходимое условие – уравнение Эйлера.

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}2\lambda_0\dot{x} + \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0\ddot{x} - \lambda_1 = 0.$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$2\lambda_0\ddot{x} - \lambda_1 = 0.$$

Пусть $\lambda_0 = 0$, тогда из последнего уравнения мы получим, что $\lambda_1 = 0$, то есть, все множители Лагранжа равны нулю одновременно. Значит необходимое условие экстремума не выполнено.

Пусть $\lambda_0 = 1/2$ (произвольное значение). Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\ddot{x} - \lambda_1 = 0;$$

$$\ddot{x} = \lambda_1.$$

Общее решение этого уравнения

$$x(t) = \frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Константы $C_1, C_2,\ \lambda_1$ найдем из имеющихся условий.

Из условия $x(0) = 1$ $C_2 = 1$. Из условия $x(1) = 6$

$$\frac{\lambda_1}{2} + C_1 + C_2 = 6.$$

Из условия $\int_0^1 x dt = 3$

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$\left.\frac{\lambda_1 t^3}{6}+C_1\frac{t^2}{2}+C_2 t\right|_0^1=3 \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{6}+C_1\cdot\frac{1}{2}+C_2=3.$$

Для нахождения C_1, C_2, λ_1 решим систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda_1}{6}+C_1\cdot\dfrac{1}{2}+C_2=3;\\ \dfrac{\lambda_1}{2}+C_1+C_2=6;\\ C_2=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+3C_1+6C_2=18;\\ \lambda_1+2C_1+2C_2=12;\\ C_2=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+3C_1+6=18;\\ \lambda_1+2C_1+2=12;\\ C_2=1;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+3C_1=12;\\ \lambda_1+2C_1=10;\\ C_2=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+3C_1=12;\\ 12-3C_1=10-2C_1;\\ C_2=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+3C_1=12;\\ C_1=2;\\ C_2=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=6;\\ C_1=2;\\ C_2=1.\end{cases}$$

Имеется допустимая экстремаль

$$\hat{x}(t)=3t^2+2t+1.$$

2. Проверим необходимые и достаточные условия второго порядка.

2.1. проверим выполнение условия Лежандра.

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(\hat{x})=2>0.$$

Выполнено условие Лежандра и значит, переходим к проверке условий Якоби.

2.2. Уравнение Якоби

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\widehat{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right)+\widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\widehat{L}_{xx}(t)h(t)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i=0,$$

где

$$g_i(t)=-\tfrac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t)+\widehat{f}_{ix}(t),$$

в нашем случае примет вид:

$$-2\ddot{h}+\mu_1=0.$$

Найдем решение однородного уравнения Якоби

$$-2\ddot{h}=0 \text{ или } \ddot{h}=0$$

Задача с решением по вариационному исчислению
скачана с https://www.matburo.ru/ex_dr_all.php?p1=vi
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

с условиями $h_0(0)=0,\ \dot{h}_0(0)=1$.

Общее решение уравнения имеет вид:

$$h(t)=C_1t+C_2.$$

Из условия $h_0(0)=0$ следует, что $C_2=0$. Из условия $\dot{h}_0(0)=1$ $C_1=1$. Таким образом, искомое решение

$$h_0(t)=t.$$

Найдем решение неоднородного уравнения Якоби

$$-2\ddot{h}+1=0$$

с условиями $h_1(0)=0,\ \dot{h}_1(0)=0$. Общее решение уравнения

$$h(t)=\frac{t^2}{4}+C_1t+C_2$$

Из условия $h_1(0)=0$ $C_2=0$. Из условия $\dot{h}_1(0)=0$ $C_1=0$. Тогда

$$h_1(t)=\frac{t^2}{4}.$$

Матрица H имеет вид:

$$H(t)=\begin{pmatrix} \tau & \tau^2/4 \\ \int_0^\tau tdt & \int_0^\tau t^2/4dt \end{pmatrix}.$$

Сопряженные точки – это решения уравнения $\det H(t)=0$. Легко получить, что $\tau=0$. Следовательно, точек сопряженных к 0 в полуинтервале (0,1] нет, а значит, усиленное условие Якоби выполнено.

2.3. Очевидно, что условие регулярности выполнено, так как в нашем случае $m=1,\ g_1=1$.

3. Поскольку функционал J_0 квадратичен, а J_1 - линеен, то $\hat{x}(t)=3t^2+2t+1$ доставляет абсолютный экстремум.

Ответ: $\hat{x}(t)=3t^2+2t+1\in abs\min$.