Решение уравнения Пфаффа

ЗАДАНИЕ.

Решить уравнение Пфаффа
$z^2dx + zdy + (3xz + 2y)dz = 0.$

РЕШЕНИЕ.

Проверяем условие интегрируемости:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) =$$

$$= z^2\left(\frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial(3xz + 2y)}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial(3xz + 2y)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2)}{\partial z}\right) + (3xz + 2y)\left(\frac{\partial(z^2)}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

$$= z^2(1-2) + z(3z - 2z) + (3xz + 2y)(0-0) = -z^2 + z^2 = 0.$$

Оно выполняется. Считая z за постоянное (тогда $dz = 0$), интегрируем уравнение между y и x:

$$z^2dx + zdy = 0,$$

$$zx + y = u(z),$$

$$y = u(z) - zx.$$

Согласно общей теории, в результате подстановки в начальное уравнение мы должны получить обыкновенное дифференциальное уравнение между z и u, действительно:

$$z^2dx + zd\left(u(z) - zx\right) + \left(3xz + 2\left(u(z) - xz\right)\right)dz = 0,$$

$$z^2dx + z(du - zdx - xdz) + (xz + 2u)dz = 0,$$

$$z^2dx + zdu - z^2dx - xzdz + xzdz + 2udz = 0,$$

$$zdu + 2udz = 0,$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dz}{z},$$

$$\ln u = -2\ln z + \ln C = \ln\frac{C}{z^2},$$

$$C = uz^2.$$

Подставляя u, окончательно получим общее решение:

$C = uz^2 = (y + xz)z^2 = yz^2 + xz^3.$

Ответ: $C = yz^2 + xz^3.$