

## Решение уравнения Пфаффа

ЗАДАНИЕ.

Решить уравнение Пфаффа  
 $z^2 dx + z dy + (3xz + 2y) dz = 0.$

РЕШЕНИЕ.

Проверяем условие интегрируемости:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \\ = z^2\left(\frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial(3xz + 2y)}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial(3xz + 2y)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2)}{\partial z}\right) + (3xz + 2y)\left(\frac{\partial(z^2)}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \\ = z^2(1 - 2) + z(3z - 2z) + (3xz + 2y)(0 - 0) = -z^2 + z^2 = 0. \end{aligned}$$

Оно выполняется. Считая  $z$  за постоянное (тогда  $dz = 0$ ), интегрируем уравнение между  $y$  и  $x$ :

$$z^2 dx + z dy = 0,$$

$$zx + y = u(z),$$

$$y = u(z) - zx.$$

Согласно общей теории, в результате подстановки в начальное уравнение мы должны получить обыкновенное дифференциальное уравнение между  $z$  и  $u$ , действительно:

$$z^2 dx + z d(u(z) - zx) + (3xz + 2(u(z) - xz)) dz = 0,$$

$$z^2 dx + z(du - z dx - x dz) + (xz + 2u) dz = 0,$$

$$z^2 dx + z du - z^2 dx - xz dz + xz dz + 2u dz = 0,$$

$$z du + 2u dz = 0,$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dz}{z},$$

$$\ln u = -2 \ln z + \ln C = \ln \frac{C}{z^2},$$

$$C = uz^2.$$

Подставляя  $u$ , окончательно получим общее решение:

Задача по УМФ скачана с <https://www.matburo.ru/> (много бесплатных примеров на сайте)  
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$C = uz^2 = (y + xz)z^2 = yz^2 + xz^3.$$

ОТВЕТ:  $C = yz^2 + xz^3.$