Дифференциальное уравнение в частных производных с решением

Задание.

Найти общее решение уравнения.

$$(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}=1-z^2.$$

Решение.

Составляем систему уравнений

$$\frac{dx}{xz+y}=\frac{dy}{x+yz}=\frac{dz}{1-z^2}.$$

Найдем ее первые интегралы:

$$\frac{xdx-ydy}{x(xz+y)-y(x+yz)}=\frac{dz}{1-z^2},$$

$$\frac{xdx-ydy}{x^2z+xy-xy-y^2z}=\frac{dz}{1-z^2},$$

$$\frac{xdx-ydy}{x^2-y^2}=\frac{zdz}{1-z^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\left(x^2-y^2\right)}{x^2-y^2}=-\frac{1}{2}\frac{d\left(1-z^2\right)}{1-z^2},$$

$$\ln\left(x^2-y^2\right)=-\ln\left(1-z^2\right)+\ln C_1,$$

$$x^2-y^2=\frac{C_1}{1-z^2},$$

$$C_1=\left(1-z^2\right)\left(x^2-y^2\right).$$

И еще один:

$$\frac{ydx-xdy}{y(xz+y)-x(x+yz)}=\frac{dz}{1-z^2},$$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2-x^2}=\frac{dz}{1-z^2},$$

$$\frac{dx-\frac{x}{y}dy}{y-\frac{x^2}{y}}=\frac{dz}{1-z^2}.$$

Введем замену $t=\frac{y}{x}, y=tx, dy=tdx+xdt.$ Получим:

$$\frac{dx-\frac{1}{t}(tdx+xdt)}{tx-\frac{x^2}{tx}}=\frac{dz}{1-z^2},$$

$$\frac{dx-dx-\frac{x}{t}dt}{tx-\frac{x}{t}}=\frac{dz}{1-z^2},$$

$$\frac{dt}{1-t^2}=\frac{dz}{1-z^2},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{1-t}+\frac{dt}{1+t}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{1-z}+\frac{dz}{1+z}\right),$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}+\frac{1}{2}\ln C_2,$$

$$\frac{1+t}{1-t}=C_2\frac{1+z}{1-z}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим интеграл системы в следующем виде:

$$\frac{x+y}{x-y}=C_2\frac{1+z}{1-z},$$

$$C_2=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1-z}{1+z}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения можно записать в виде:

$$F\left(\left(1-z^2\right)\left(x^2-y^2\right);\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right)=0,$$

где F – произвольная функция.

Ответ: $F\left(\left(1-z^2\right)\left(x^2-y^2\right);\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right)=0$