Решение задачи: непрерывная случайная величина, закон арксинуса.

Задание. Функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x\le -1, \\ a+b\arcsin x, \ -1\le x\le 1, \\ 1, \ x\ge 1. \end{cases}$$

А) найти a и b;
Б) найти плотность $f(x)$;
В) нарисовать график $F(x)$;
Г) нарисовать график $f(x)$;
Д) найти $M[X]$;
Е) найти $D[X]$.

Решение.

Найдем a и b из условий:
$F(-1)=a+b\arcsin(-1)=0$,
$F(1)=a+b\arcsin(1)=1$,
то есть получаем систему:

$$\begin{cases} a-b\pi/2=0, \\ a+b\pi/2=1; \end{cases}$$

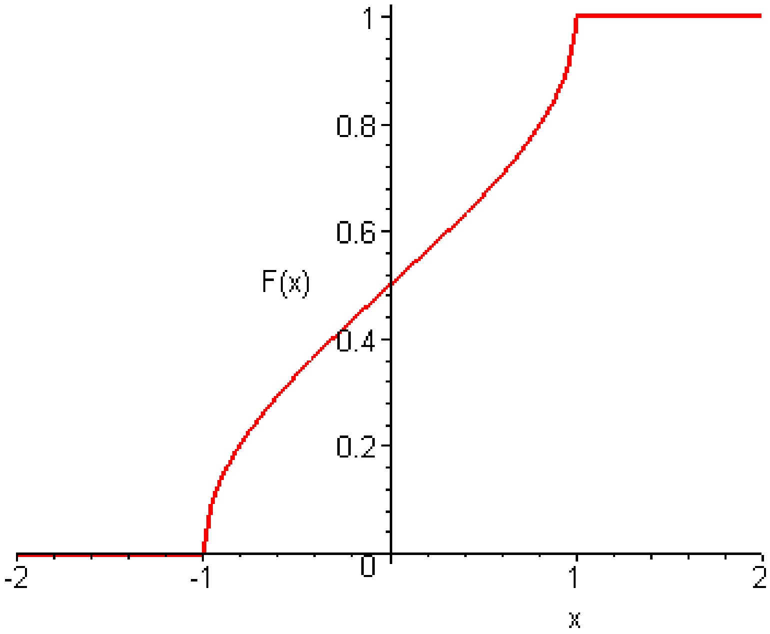
откуда $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{\pi}$, то есть

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x\le -1, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, \ -1\le x\le 1, \\ 1, \ x\ge 1. \end{cases}$$

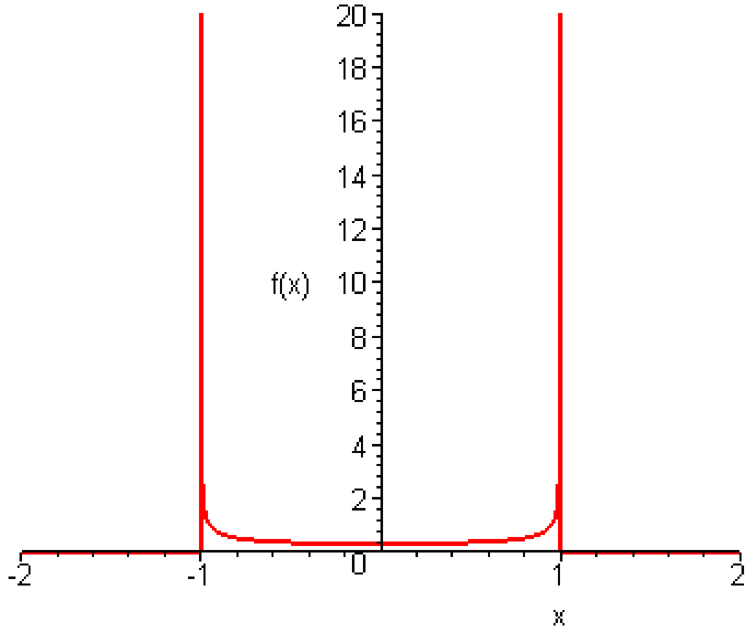
Найдем плотность $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ x\le -1, \\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1\le x\le 1, \\ 0, \ x\ge 1. \end{cases}$$

Нарисуем график $F(x)$:



Нарисуем график $f(x)$:



Найдем математическое ожидание:

$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$ (как интеграл от нечетной функции на симметричном интервале).

Найдем дисперсию:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx-(M[X])^2=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(0+\frac{1}{2}\arcsin 1\right)-\frac{2}{\pi}(0)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}.$$