Производящая функция для ДСВ. Решение задачи

Задача. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения.

$X=-2$	$X=0$	$X=2$
$1/4$	$1/2$	$1/4$

Найти производящую функцию моментов случайной величины X и с ее помощью вычислить математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Производящая функция моментов равна

$$M_X(t)=\sum_{i=0}^{2} e^{tx_i} p_i = \frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{2t}.$$

Вычислим с помощью найденной функции математическое ожидание и дисперсию.
Для этого вычисляем первый и второй момент по формуле:

$$M\left[X^n\right]=\frac{d^n}{dt^n}\left(M_X(t)\right)\Big|_{t=0}.$$

Получаем:

$$\frac{d}{dt}M_X(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{2t}\right)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{2t},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{2t}\right)=e^{-2t}+e^{2t}.$$

Далее:

$$\frac{d}{dt}M_X(t)\Big|_{t=0}=\left(-\frac{1}{2}e^{0}+\frac{1}{2}e^{0}\right)=0.$$

$$\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\Big|_{t=0}=e^0+e^0=2.$$

Математическое ожидание: $M[X]=\frac{d}{dt}\left(M_X(t)\right)\Big|_{t=0}=0$.

Дисперсия: $D[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2=\frac{d^2}{dt^2}\left(M_X(t)\right)\Big|_{t=0}-0^2=2.$