

Тема: Одноканальная СМО с неограниченной очередью

ЗАДАНИЕ. Система массового обслуживания — билетная касса с одним окошком и неограниченной очередью. Касса продает билеты в пункты А и В. Пассажиры, желающих купить билет в пункт А, приходят в среднем трое за 20 мин, в пункт В — двое за 20 мин. Поток пассажиров простейший. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания — показательное. Вычислить финальные вероятности P_0, P_2, P_3 , среднее число заявок в системе и в очереди, среднее время пребывания заявки в системе, среднее время пребывания заявки в очереди.

РЕШЕНИЕ. Имеем систему массового обслуживания с одним каналом (одна касса) и неограниченной очередью. Интенсивность потока входящих заявок равна $(2+3=5$ пассажиров за 20 минут) = (15 пассажиров в час), то есть $\lambda=15$. Интенсивность потока обслуживания равна (3 пассажира за 10 минут) = (18 пассажиров за час), то есть $\mu=18$.

Нагрузка системы $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$, нагрузка системы на один канал такая же:

$\psi = \rho = 5/6 < 1$, поэтому предельный режим работы системы существует.

Рассчитаем эффективность работы СМО в предельном режиме.

Вычислим финальные вероятности:

Вероятность простоя системы: $p_0 = \psi^0(1-\psi) = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \approx 0,167$.

Вероятность того, что в системе одна заявка (один пассажир у кассы):

$p_1 = \psi^1(1-\psi) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \approx 0,139$.

Вероятность того, что в системе две заявки (один пассажир у кассы и один пассажир в очереди):

$$p_2 = \psi^2(1-\psi) = \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0,116.$$

Вероятность того, что в системе три заявки (один пассажир у кассы и два пассажира в очереди):

$$p_3 = \psi^3(1-\psi) = \frac{125}{216} \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296} \approx 0,096.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди (пассажиров в очереди) равно

$$N_{line} = \frac{\psi^2}{(1-\psi)} = \frac{25/36}{1/6} = \frac{25}{216} \approx 0,116 \text{ человек.}$$

Среднее время ожидания в очереди равно

$$T_{line} = \frac{N_{line}}{\lambda} = \frac{0,116}{15} \approx 0,0077 \text{ часа} \approx 0,5 \text{ минут.}$$

Среднее число пассажиров, покупающих билеты, равно $N_s = \rho = \psi = 5/6 \approx 0,833$

Среднее время обслуживания равно $T_s = \frac{N_s}{\lambda} = \frac{0,833}{15} \approx 0,0555 \text{ часа} \approx 3,3 \text{ минуты}$

Тогда среднее число заявок в системе

$$N_{sys} = N_s + N_{line} = 0,833 + 0,116 = 0,949 \text{ (пассажиров).}$$

Среднее время пребывания заявки в системе $T_{sys} = T_s + T_{line} = 3,3 + 0,5 = 3,8$
(минут).