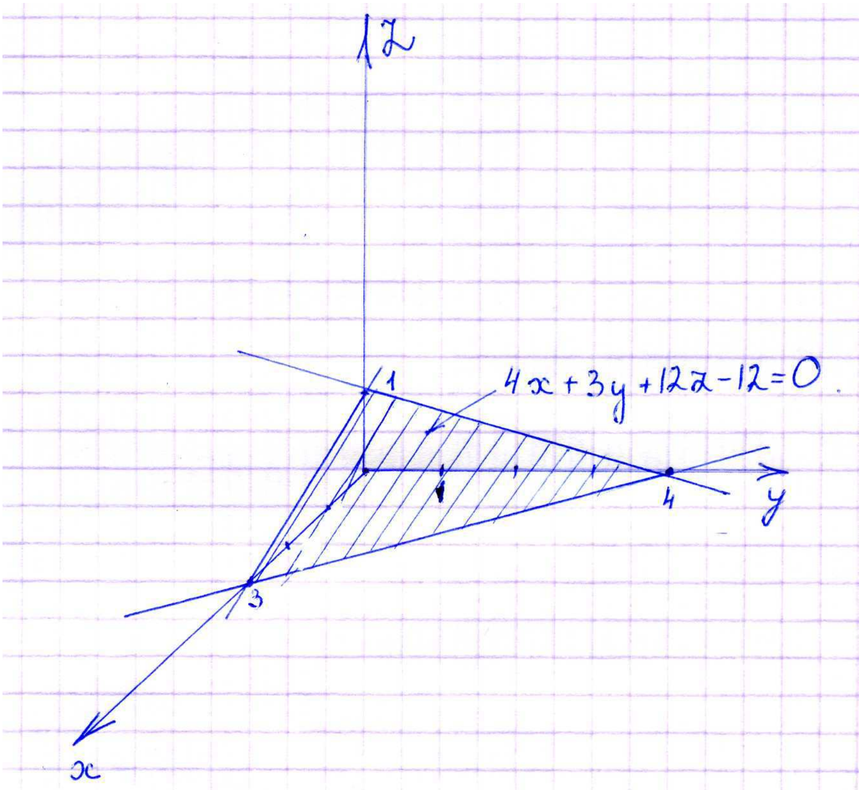
Пример решения задачи: поверхностный интеграл 1-го рода

Задание.

Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(5x-3y+3z)d\sigma$, *где* σ *– часть плоскости*

$P: 4x+3y+12z-12=0$, *ограниченная координатными плоскостями.*

Решение.



Запишем уравнение плоскости в виде: $z=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y+1$.

$z'_x=-\frac{1}{3}$; $z'_y=-\frac{1}{4}$.

Интеграл найдем по формуле:

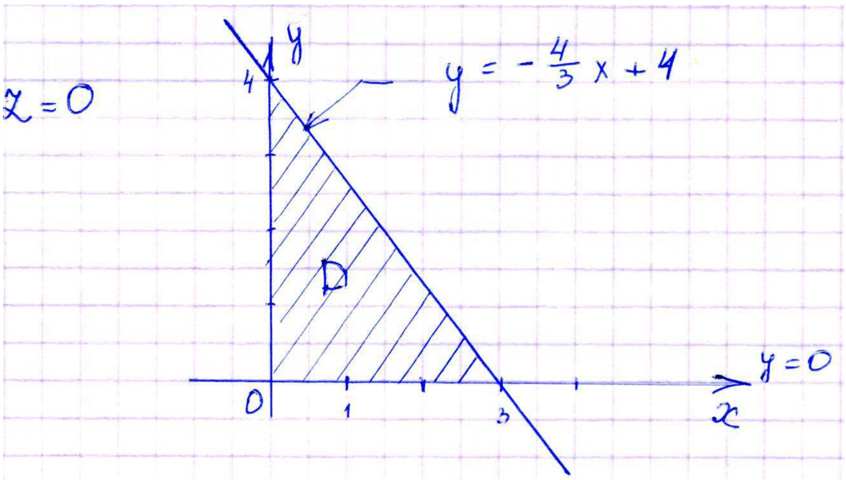
$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y;z)d\sigma=\iint\limits_{D} f(x;y;z(x;y))\cdot\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy.$$

$$\iint_{\sigma}(5x-3y+3z)d\sigma=\iint_{D}(5x-3y-x-\frac{3}{4}y+3)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}dxdy=$$

$$=\frac{13}{12}\iint_{D}(4x-\frac{15}{4}y+3)dxdy.$$

Пределы интегрирования:

Плоскость xOy: $z=0$;



$4x+3y-12=0;\quad y=-\frac{4}{3}x+4$;

x : от $x=0$ до $x=3$;

y: от y=0 до $y=-\frac{4}{3}x+4$;

$$\frac{13}{12}\iint_{D}(4x-\frac{15}{4}y+3)dxdy=\frac{13}{12}\int_{0}^{3}dx\int_{0}^{-\frac{4}{3}x+4}(4x-\frac{15}{4}y+3)dy=$$

$$=\frac{13}{12}\int_{0}^{3}dx\cdot(4xy-\frac{15}{8}y^{2}+3y)\Big|_{0}^{-\frac{4}{3}x+4}=$$

$$=\frac{13}{12}\int_{0}^{3}dx\cdot(4x(-\frac{4}{3}x+4)-\frac{15}{8}\cdot(-\frac{4}{3}x+4)^{2}+3(-\frac{4}{3}x+4))=$$

$$\frac{13}{12}\int_0^3(-2x^2+32x-18)dx==\frac{13}{6}\int_0^3(-x^2+16x-9)dx=\frac{13}{6}\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{16x^2}{2}-9x\right)\Big|_0^3=$$
$$\frac{13}{6}\left(-\frac{x^3}{3}+8x^2-9x\right)\Big|_0^3==\frac{13}{6}\left(-\frac{3^3}{3}+8\cdot 3^2-27\right)=\frac{13}{6}(-9+72-27)=78.$$

Ответ. 78.