Нелинейное программирование
Решение задачи методом Розена

ЗАДАНИЕ. Решить задачу нелинейного программирования методом проектируемых градиентов Розена

$$Z = 8 + 8x_1 + 10x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 4x_2 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^0 = 3 \\ x_2^0 = 2 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ.

Изменим систему ограничений

$$Z = 8 + 8x_1 + 10x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 4x_2 \le 16 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$

Матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итерация 1.

$$g\left(X^{(0)}\right) = C + 2DX^{(0)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$ - не равно 0.

Условие оптимальности не выполняется.

$$S^{(0)} = g\left(X^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Определяем пробное приближение $\widetilde{X}^{(0)} = X^{(0)} + \lambda' S^{(0)}$

$$\lambda' = min_+\left(-\frac{A\cdot X^{(0)}-B}{A\cdot S^{(0)}}\right) = min_+\begin{pmatrix}3\\0,25\\0,75\\-0,333\end{pmatrix} = 0,25$$

$$\widetilde{X}^{(0)} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + 0,25\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3,5\end{pmatrix}$$

Далее находим

$$g\left(\widetilde{X}^{(0)}\right) = C + 2D\widetilde{X}^{(0)} = \begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

$S^{(0)}\cdot g\left(\widetilde{X}^{(0)}\right) = 18$ - больше 0, новое приближение

$$X^{(1)} = \widetilde{X}^{(0)} = \begin{pmatrix}2\\3,5\end{pmatrix}$$

Итерация 2.

$g\left(X^{(1)}\right) = C + 2DX^{(1)} = \begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ - не равно 0.

Точка $X^{(1)} = \begin{pmatrix}2\\3,5\end{pmatrix}$ принадлежит прямой 2 ограничения.

Находим U и матрицу проектирования P

$$A = \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$$

$$U = \left(A\cdot A^T\right)^{-1}\cdot A\cdot g\left(X^{(1)}\right) = 0,706$$

$$P = E - A^T\cdot\left(A\cdot A^T\right)^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix}-0,941 & -0,235\\-0,235 & 0,059\end{pmatrix}$$

$$P\cdot g\left(X^{(1)}\right) = \begin{pmatrix}-0,706\\0,176\end{pmatrix}$$

Условие оптимальности не выполняется.

$$S^{(1)} = P\cdot g\left(X^{(1)}\right) = \begin{pmatrix}-0,706\\0,176\end{pmatrix}$$

Определяем пробное приближение $\widetilde{X}^{(1)} = X^{(1)} + \lambda' S^{(1)}$

$$\lambda' = min_{+}\left(-\frac{A\cdot X^{(1)}-B}{A\cdot S^{(1)}}\right) = min_{+}\begin{pmatrix} -2,397 \\ - \\ 2,833 \\ -19,833 \end{pmatrix} = 2,833$$

$$\widetilde{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3,5 \end{pmatrix} + 2,833\cdot\begin{pmatrix} -0,706 \\ 0,176 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Далее находим

$$g\left(\widetilde{X}^{(1)}\right) = C + 2D\widetilde{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$S^{(1)}\cdot g\left(\widetilde{X}^{(1)}\right) = 6$ - больше 0, новое приближение

$$X^{(2)} = \widetilde{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Итерация 3.

$g\left(X^{(2)}\right) = C + 2DX^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ - не равно 0.

Точка $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ принадлежит прямой 2 ограничения.

Находим U и матрицу проектирования P

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$U = \left(A\cdot A^{T}\right)^{-1}\cdot A\cdot g\left(X^{(2)}\right) = 0,941$$

$$P = E - A^{T}\cdot\left(A\cdot A^{T}\right)^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} 0,941 & -0,235 \\ -0,235 & 0,059 \end{pmatrix}$$

$$P\cdot g\left(X^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 7,059 \\ -1,765 \end{pmatrix}$$

Условие оптимальности не выполняется.

$$S^{(2)} = P\cdot g\left(X^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 7,059 \\ -1,765 \end{pmatrix}$$

Определяем пробное приближение $\widetilde{X}^{(2)} = X^{(2)} + \lambda' S^{(2)}$

$$\lambda' = min_+ \left(-\frac{A \cdot X^{(2)} - B}{A \cdot S^{(2)}} \right) = min_+ \begin{pmatrix} 0,523 \\ - \\ 0 \\ 2,267 \end{pmatrix} = 0,523$$

$$\widetilde{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0,523 \cdot \begin{pmatrix} 7,059 \\ -1,765 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,692 \\ 3,077 \end{pmatrix}$$

Далее находим

$$g\left(\widetilde{X}^{(2)}\right) = C + 2D\widetilde{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,692 \\ 3,077 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,769 \\ 3,846 \end{pmatrix}$$

$S^{(2)} \cdot g\left(\widetilde{X}^{(2)}\right) = -46,462$ - меньше 0, новое приближение

$$p = \frac{\left(S^{(2)}\right)^T \cdot S^{(2)}}{\left(S^{(2)}\right)^T \cdot S^{(2)} - g\left(\widetilde{X}^{(2)}\right) \cdot S^{(2)}} = 0,492$$

$$X^{(3)} = p\widetilde{X}^{(2)} + (1-p)X^{(2)} =$$

$$= 0,492 \begin{pmatrix} 3,692 \\ 3,077 \end{pmatrix} + (1 - 0,492) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,818 \\ 3,545 \end{pmatrix}$$

Итерация 4.

$$g\left(X^{(3)}\right) = C + 2DX^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,818 \\ 3,545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,727 \\ 2,909 \end{pmatrix}$$ - не равно 0.

Точка $X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,818 \\ 3,545 \end{pmatrix}$ принадлежит прямой 2 ограничения.

Находим U и матрицу проектирования P

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$U = \left(A \cdot A^T\right)^{-1} \cdot A \cdot g\left(X^{(3)}\right) = 0,727$$

$$P = E - A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0,941 & -0,235 \\ -0,235 & 0,059 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot g\left(X^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Условие оптимальности выполняется.

Точка $X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,818 \\ 3,545 \end{pmatrix}$ является точкой максимума, максимум функции 38,818.