Задача по нелинейному программированию скачана с
https://www.matburo.ru/ex_mp.php?p1=mpnp
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Нелинейное программирование
Решение задачи оптимизации с ограничениями и без

ЗАДАНИЕ. Для следующей задачи нелинейного программирования

$$F=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-12x_1+2x_2\to min$$

$$\begin{cases}4x_1+3x_2\ge 12\\ x_1+3x_2\le 6\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

a) доказать, что функция является выпуклой

b) найти минимум целевой функции без учета ограничений с помощью градиентных методов

c) найти минимум целевой функции с учетом ограничений

РЕШЕНИЕ.

a) доказать, что функция является выпуклой

Находим частные производные функции первого порядка (градиент)

$$grad=\begin{pmatrix}\dfrac{dF}{dx_1}\\ \dfrac{dF}{dx_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1-x_2-12\\ x_2-x_1+2\end{pmatrix}$$

Далее находим матрицу вторых производных.

$$H(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{d^2F}{dx_1^2} & \dfrac{d^2F}{dx_1dx_2}\\ \dfrac{d^2F}{dx_2dx_1} & \dfrac{d^2F}{dx_2^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Находим угловые миноры.

$$\Delta_1=H(X)_{1,1}=3$$

$$\Delta_2=|H(X)|=3\cdot 1-(-1)\cdot(-1)=3-1=2$$

Поскольку знаки угловых миноров положительны, то функция повсюду на области определения – выпукла, то есть на функции присутствует глобальный минмиум.

Задача по нелинейному программированию скачана с
https://www.matburo.ru/ex_mp.php?p1=mpnp
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

b) найти минимум целевой функции без учета ограничений с помощью градиентных методов

Используем метод, дающий лучший результат максимально быстро – метод Ньютона

Здесь используется градиент, формула расчета следующей точки:

$$X^1 = X^0 - H^{-1}(X^0)\left[grad(X^0)\right]$$

Градиент функции мы уже нашли

$$grad\left(X=(x_1;x_2)\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{dF}{dx_1}\\ \dfrac{dF}{dx_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1-x_2-12\\ x_2-x_1+2\end{pmatrix}$$

$H(X)=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ - матрица вторых производных,

H^{-1} - обратная матрица $H^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1{,}5\end{pmatrix}$

Поиск начнем с точки $X^0=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

Шаг 0.

Точка $X^0=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

Значение функции в точке $f(X^0)=\dfrac{3}{2}\cdot(0)^2+\dfrac{1}{2}\cdot(0)^2-0\cdot 0-12\cdot 0+2\cdot 0=0$

Градиент в точке $grad(X^0)=\begin{pmatrix}3\cdot 0-0-12\\ 0-0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\ 2\end{pmatrix}$

Матрица $H^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1{,}5\end{pmatrix}$

Задача по нелинейному программированию скачана с
https://www.matburo.ru/ex_mp.php?p1=mpnp
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Шаг 1.
Новая точка (по формуле приближения):

$$X^1 = X^0 - H^{-1}\left[grad\left(X^0\right)\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Значение функции в точке $f\left(X^0\right) = \frac{3}{2} \cdot (5)^2 + \frac{1}{2} \cdot (3)^2 - 5 \cdot 3 - 12 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = -27$

Градиент в точке $grad\left(X^1\right) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 3 - 12 \\ 3 - 5 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Разница в значениях функции (на текущем и предыдущем шаге)
$\left| f\left(X^1\right) - f\left(X^0\right) \right| = 27$ - будем проводить итерации, пока точность не будет равна 0.

Шаг 2.
Новая точка (по формуле приближения):

$$X^2 = X^1 - H^{-1}\left[grad\left(X^1\right)\right] = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Значение функции в точке $f\left(X^1\right) = \frac{3}{2} \cdot (5)^2 + \frac{1}{2} \cdot (3)^2 - 5 \cdot 3 - 12 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = -27$

Градиент в точке $grad\left(X^2\right) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 3 - 12 \\ 3 - 5 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Разница в значениях функции (на текущем и предыдущем шаге)
$\left| f\left(X^2\right) - f\left(X^1\right) \right| = 0$ - точность достигнута.

Минимум функции равен -27 и достигается он в точке

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Задача по нелинейному программированию скачана с
https://www.matburo.ru/ex_mp.php?p1=mpnp
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

с) найти минимум целевой функции с учетом ограничений

$$F=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-12x_1+2x_2\to min$$

$$\begin{cases}4x_1+3x_2\geq 12\\ x_1+3x_2\leq 6\\ x_1,x_2\geq 0\end{cases}$$

Используем метод штрафных функций

Строим функцию без ограничений, используя штраф

$$F(x_1,x_2)=\left(\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-12x_1+2x_2\right)+r\left(\frac{1}{4x_1+3x_2-12}+\frac{1}{6-x_1-3x_2}\right)$$

Пусть $r_0=1$.

Найдем минимум функции

$$F(x_1,x_2)=\left(\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-12x_1+2x_2\right)+1\cdot\left(\frac{1}{4x_1+3x_2-12}+\frac{1}{6-x_1-3x_2}\right)$$

Найдем минимум функции $F(x_1,x_2)$ градиентным методом:

$$grad(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{dF}{dx_1}\\ \dfrac{dF}{dx_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1-x_2-12-\dfrac{4}{(4x_1+3x_2-12)^2}+\dfrac{1}{(6-x_1-3x_2)^2}\\ x_2-x_1+2-\dfrac{3}{(4x_1+3x_2-12)^2}+\dfrac{3}{(6-x_1-3x_2)^2}\end{pmatrix}$$

$$\lambda(x_1,x_2)=\frac{1}{\begin{vmatrix}\dfrac{d^2F}{dx_1^2} & \dfrac{d^2F}{dx_1x_2}\\ \dfrac{d^2F}{dx_2x_1} & \dfrac{d^2F}{dx_2^2}\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}3+\dfrac{32}{(4x_1+3x_2-12)^3}-\dfrac{2}{(6-x_1-3x_2)^3} & -1+\dfrac{24}{(4x_1+3x_2-12)^3}-\dfrac{6}{(6-x_1-3x_2)^3}\\ -1+\dfrac{24}{(4x_1+3x_2-12)^3}-\dfrac{6}{(6-x_1-3x_2)^3} & 1+\dfrac{18}{(4x_1+3x_2-12)^3}-\dfrac{18}{(6-x_1-3x_2)^3}\end{vmatrix}}$$

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Шаг 0.

Для точки $\begin{pmatrix} x_1^0 = 0 \\ x_2^0 = 0 \end{pmatrix}$

$$grad(X^0) = \begin{pmatrix} 3\cdot 0 - 0 - 12 - \frac{4}{(4\cdot 0 + 3\cdot 0 - 12)^2} + \frac{1}{(6 - 0 - 3\cdot 0)^2} \\ 0 - 0 + 2 - \frac{3}{(4\cdot 0 + 3\cdot 0 - 12)^2} + \frac{3}{(6 - 0 - 3\cdot 0)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2,063 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(X^0) =$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 + \frac{32}{(4\cdot 0 + 3\cdot 0 - 12)^3} - \frac{2}{(6 - 0 - 3\cdot 0)^3} & -1 + \frac{24}{(4\cdot 0 + 3\cdot 0 - 12)^3} - \frac{6}{(6 - 0 - 3\cdot 0)^3} \\ -1 + \frac{24}{(4\cdot 0 + 3\cdot 0 - 12)^3} - \frac{6}{(6 - 0 - 3\cdot 0)^3} & 1 + \frac{18}{(4\cdot 0 + 3\cdot 0 - 12)^3} - \frac{18}{(6 - 0 - 3\cdot 0)^3} \end{vmatrix}}$$

$$= 0,447$$

$$F(X^0) = 0,083$$

Новые координаты:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 = x_1^0 - \lambda_0 \cdot \left(\frac{dF}{dx_1}\right)_{X^0} = 0 - 0,447 \cdot (-12) = 5,366 \\ x_2^1 = x_2^0 - \lambda_0 \cdot \left(\frac{dF}{dx_2}\right)_{X^0} = 0 - 0,447 \cdot (2,063) = -0,922 \end{pmatrix}$$

Шаг 1.

Для точки $\begin{pmatrix} x_1^1 = 5,366 \\ x_2^1 = -0,922 \end{pmatrix}$

$$grad(X^1) =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 5,366 - (-0,922) - 12 - \frac{4}{(4\cdot 5,366 + 3\cdot(-0,922) - 12)^2} + \frac{1}{(6 - 5,366 - 3\cdot(-0,922))^2} \\ (-0,922) - 5,366 + 2 - \frac{3}{(4\cdot 5,366 + 3\cdot(-0,922) - 12)^2} + \frac{3}{(6 - 5,366 - 3\cdot(-0,922))^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5,017 \\ -4,096 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(X^1) =$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 + \frac{32}{(4\cdot 5,366 + 3\cdot(-0,922) - 12)^3} - \frac{2}{(6 - 5,366 - 3\cdot(-0,922))^3} & -1 + \frac{24}{(4\cdot 5,366 + 3\cdot(-0,922) - 12)^3} - \frac{6}{(6 - 5,366 - 3\cdot(-0,922))^3} \\ -1 + \frac{24}{(4\cdot 5,366 + 3\cdot(-0,922) - 12)^3} - \frac{6}{(6 - 5,366 - 3\cdot(-0,922))^3} & 1 + \frac{18}{(4\cdot 5,366 + 3\cdot(-0,922) - 12)^3} - \frac{18}{(6 - 5,366 - 3\cdot(-0,922))^3} \end{vmatrix}}$$

$$= 0,238$$

$$F(X^1) = -17,637$$

Новые координаты:

Задача по нелинейному программированию скачана с
https://www.matburo.ru/ex_mp.php?p1=mpnp
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$\begin{pmatrix} x_1^2 = x_1^1 - \lambda_1 \cdot \left(\dfrac{dF}{dx_1}\right)_{X^1} = 5,366 - 0,238 \cdot (5,017) = 4,172 \\ x_2^2 = x_2^1 - \lambda_1 \cdot \left(\dfrac{dF}{dx_2}\right)_{X^1} = -0,922 - 0,238 \cdot (-4,096) = 0,052 \end{pmatrix}$$

Шаг 2.

Для точки $\begin{pmatrix} x_1^2 = 4,172 \\ x_2^2 = 0,052 \end{pmatrix}$

$$grad\left(X^2\right) = \begin{pmatrix} 0,651 \\ -1,173 \end{pmatrix}$$

$$\lambda\left(X^2\right) = 0,054$$

$$F\left(X^2\right) = -24,068$$

Новые координаты:

$$\begin{pmatrix} x_1^3 = x_1^2 - \lambda_2 \cdot \left(\dfrac{dF}{dx_1}\right)_{X^2} = 4,172 - 0,054 \cdot (0,651) = 4,136 \\ x_2^3 = x_2^2 - \lambda_2 \cdot \left(\dfrac{dF}{dx_2}\right)_{X^2} = 0,052 - 0,054 \cdot (-1,173) = 0,116 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$X^{opt} = \begin{pmatrix} 4,136 \\ 0,052 \end{pmatrix} \quad F\left(X^{opt}\right) = -24,068$$