

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ: МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ЗАДАНИЕ. Экспериментальные данные о значениях переменных x и y приведены в таблице:

x_i	1	2	4	6	8
y_i	3	2	1	0,5	0

В результате их выравнивания получена функция $y = \frac{5}{2x}$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

РЕШЕНИЕ.

Параметры a и b уравнения $y = ax + b$ по методу наименьших квадратов можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + b n = \sum y_i \end{cases}$$

где суммирование ведется по i от 1 до n , $n = 5$. Составим расчетную таблицу:

	Сумма					
x_i	1	2	4	6	8	21
y_i	3	2	1	0,5	0	6,5
x_i^2	1	4	16	36	64	121
$x_i y_i$	3	4	4	3	0	14

Получаем систему:

$$\begin{cases} 121a + 21b = 14, \\ 21a + 5b = 6,5. \end{cases}$$

откуда находим $a = -0,405$, $b = 3,003$, то есть получаем функцию $y = -0,405x + 3,003$.

Выясним, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные.

Обозначим $y_1 = \frac{5}{2x}$, $y_2 = -0,405x + 3,003$. Вычислим сумму квадратов отклонений в обоих случаях:

						Сумма
x_i	1	2	4	6	8	21
y_i	3	2	1	0,5	0	6,5
y_{1i}	2,500	1,250	0,625	0,417	0,313	5,104
y_{2i}	2,598	2,193	1,383	0,573	-0,237	6,510
$(y_i - y_{1i})^2$	0,250	0,563	0,141	0,007	0,098	1,058
$(y_i - y_{2i})^2$	0,162	0,037	0,147	0,005	0,056	0,407

Видно, что так как $0,407 < 1,058$, вторая линия (прямая) лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает данные.

Сделаем чертеж.

