Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
©МатБюро - Решение задач по математике, статистике, экономике, программированию
Еще решения математической статистики: www.matburo.ru/ex_subject.php?p=ms

Доверительные интервалы для дисперсии и математического ожидания

Задание. По группе семей с доходом 154 руб./чел. зафиксированы следующие цифры потребления молока за месяц (на одного человека): 8,3; 8,6; 8,7; 8,8; 9,1; 9,3; 9,4; 13,4; 13,5; 13,8; 13,9; 14,1; 14,3. Найти доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии с надежностью $\gamma = 0,95$, дать точность оценки. Выборка произведена из нормальной совокупности.

Решение. Найдем числовые выборочные характеристики.
Выборочная средняя:
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{13}145,2 \approx 11,169.$$
Выборочная дисперсия
$$D_x = \frac{1}{n}\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{13}80,628 \approx 6,202.$$
Выборочное среднеквадратичное отклонение:
$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{6,202} \approx 2,49.$$

Расчеты в таблице ниже:

	x_i	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
	8,3	8,232
	8,6	6,601
	8,7	6,097
	8,8	5,613
	9,1	4,282
	9,3	3,494
	9,4	3,130
	13,4	4,976
	13,5	5,432
	13,8	6,921
	13,9	7,457
	14,1	8,589
	14,3	9,802
Сумма	**145,2**	**80,628**

Полагая, что X имеет нормальное распределение, найдем доверительный интервал для неизвестного математического ожидания генеральной совокупности. Степень надежности считаем равной $\gamma = 0,95$.

Используем формулу:
$$\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}},$$

где t_γ определяется из таблицы распределения Стьюдента $t_\gamma\left(13-1;0,95\right)=2,179$.
Получаем после подстановки известных данных:
$11,169-2,179\dfrac{2,49}{\sqrt{13}}<a<11,169+2,179\dfrac{2,49}{\sqrt{13}}$,
$9,664<a<12,674$.
Точность оценки:
$\delta=t_\gamma\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=2,179\dfrac{2,49}{\sqrt{13}}\approx 1,505$

Построим доверительный интервал для дисперсии σ^2. Найдем интервальную оценку (доверительный интервал) для неизвестного среднего квадратического отклонения σ с надежностью 0,95 по известному «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению из формулы (Гмурман):

$$\sigma_x(1-q)<\sigma<\sigma_x(1+q), q<1,$$

где q определяется из таблицы по заданным значениям n = 13 и γ = 0,95. В нашем случае q = 0,52. Тогда после подстановки получаем:
$2,49(1-0,52)<\sigma<2,49(1+0,52)$,
$1,1952<\sigma<3,7848$,
$1,429<\sigma^2<14,325$.