Методы оптимизации
Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных в области

ЗАДАНИЕ. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в области

$z = xy, \quad x^2 + y^2 \le 1$

РЕШЕНИЕ. Находим частные производные и приравняем к нулю (ищем критические точки внутри области)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x$$
$$(x = 0; y = 0) \in D$$

Исследуем значение функции на границе области

$$x = \pm\sqrt{1-y^2}$$
$$z = \pm y\sqrt{1-y^2}$$
$$\frac{dz}{dy} = \pm\sqrt{1-y^2} \pm \frac{y}{2\sqrt{1-y^2}}(-2y) = \pm\sqrt{1-y^2} \mp \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$y \ne \pm 1$$
$$\pm\sqrt{1-y^2} \mp \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$
$$1 - y^2 = y^2$$
$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Исследуем полученные точки:

$y=1; x=0; z(0;1)=0$

$y=-1; x=0; z(0;-1)=0$

$y=\frac{1}{\sqrt{2}}; x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}; z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}; x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}; z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$

Выбираем наименьшее и наибольшее:

$$\min_{x^2+y^2\le 1} z = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\max_{x^2+y^2\le 1} z = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$$