Операционное исчисление.
Решение системы трех дифференциальных уравнений

Задание.

Решить систему ДУ с помощью преобразования Лапласа

$$\begin{cases} x' = -y + z \\ y' = z \\ z' = -x + z \end{cases} ; x(0) = 1; y(0) = z(0) = \frac{1}{2}$$

Решение.

Пусть $x(t) \fallingdotseq X(p), y(t) \fallingdotseq Y(p), \mathrm{z}(t) \fallingdotseq \mathrm{Z}(p)$

Тогда,

$$x'(t) \fallingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$$

$$y'(t) \fallingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - \frac{1}{2}$$

$$z'(t) \fallingdotseq pZ(p) - z(0) = pZ(p) - \frac{1}{2}$$

Получаем систему алгебраических уравнений, из которых надо найти $X(p), Y(p), Z(p)$.

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -Y(p) + Z(p) \\ pY(p) - \frac{1}{2} = Z(p) \\ pZ(p) - \frac{1}{2} = -X(p) + Z(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pX(p) + Y(p) - Z(p) = 1 \\ pY(p) - Z(p) = \frac{1}{2} \\ X(p) + (p-1)Z(p) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

По формулам Крамера (находим определители, делим) получаем:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p & 1 & -1 \\ 0 & p & -1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{vmatrix}=p\left(p(p-1)+0\right)-1(0+1)-1(0-p)=(p-1)\left(p^2+1\right)$$

$$\Delta X=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & p & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & p-1 \end{vmatrix}=1\left(p(p-1)-0\right)-1\left(\frac{1}{2}(p-1)+\frac{1}{2}\right)-1\left(0-\frac{1}{2}p\right)=p(p-1)$$

$$\Delta Y=\begin{vmatrix} p & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & p-1 \end{vmatrix}=1\left(\frac{1}{2}(p-1)+\frac{1}{2}\right)-1\left(0(p-1)+1\right)-1\left(0-\frac{1}{2}p\right)=\frac{1}{2}\left(p^2-1\right)$$

$$\Delta Z=\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 0 & p & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=p\left(\frac{p}{2}-0\right)-1\left(0-\frac{1}{2}\right)+1(0-p)=\frac{(p-1)^2}{2}$$

Тогда неизвестные и их оригиналы:

$$X(p)=\frac{\Delta X}{\Delta}=\frac{p(p-1)}{(p-1)\left(p^2+1\right)}=\frac{p}{p^2+1}\risingdotseq x(t)=\cos t$$

$$Y(p)=\frac{\Delta Y}{\Delta}=\frac{\frac{1}{2}\left(p^2-1\right)}{(p-1)\left(p^2+1\right)}=\frac{1}{2}\frac{p+1}{p^2+1}\risingdotseq y(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$$

$$Z(p)=\frac{\Delta Z}{\Delta}=\frac{\frac{(p-1)^2}{2}}{(p-1)\left(p^2+1\right)}=\frac{1}{2}\frac{p-1}{p^2+1}\risingdotseq z(t)=\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$$

ОТВЕТ:

$x(t)=\cos t$

$y(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$

$z(t)=\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$