

Пример вычисления криволинейного интеграла

ЗАДАНИЕ.

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (y^2 + x)dx + \frac{2x}{y}dy$$

вдоль кривой $y = e^x$ от точки $A(0; 1)$ до точки $B(1; e)$.

РЕШЕНИЕ.

Используем формулу

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)Q(x, \varphi(x))) dx$$

$$AB: y = \varphi(x) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\varphi'(x) = e^x$$

Получим:

$$\begin{aligned} \int_{AB} (y^2 + x)dx + \frac{2x}{y}dy &= \int_0^1 \left((e^x)^2 + x + e^x \cdot \frac{2x}{e^x} \right) dx = \int_0^1 (e^{2x} + 3x) dx = \\ &= \left(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}e^0 + \frac{3}{2} \cdot 0 \right) = \frac{e^2}{2} + 1 \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{e^2}{2} + 1$