Решение задачи по криволинейным интегралам скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=makrint
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Пример нахождения полного дифференциала через криволинейный интеграл

Задание.

Доказать, что данное выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом функции $\Phi(x,y)$ и найти ее с помощью криволинейного интеграла.

$$\frac{y\cdot 2^{y/x}}{x^2}dx-\frac{2^{y/x}}{x}dy$$

Решение.

$$P(x,y)=\frac{y\cdot 2^{y/x}}{x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2^{y/x}+y\cdot 2^{y/x}\ln 2\cdot\frac{1}{x}}{x^2}=\frac{2^{y/x}(\frac{y}{x}\ln 2+1)}{x^2}$$

$$Q(x,y)=-\frac{2^{y/x}}{x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=-\frac{2^{y/x}\cdot\ln 2\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot x-2^{y/x}}{x^2}=-\frac{-2^{y/x}(\frac{y}{x}\ln 2+1)}{x^2}=\frac{2^{y/x}(\frac{y}{x}\ln 2+1)}{x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}$, то заданное выражения является дифференциалом некоторой функции.

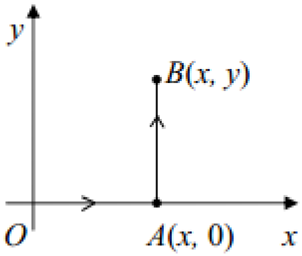
Найдем эту функцию.

$$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C$$

Так как путь движения от (x_0,y_0) до (x,y) не влияет на величину интеграла, удобно вести интегрирование по ломаной линии , звенья которой лежат на координатных осях или им параллельным.

За начальную точку возьмем $O(0,0)$, контуром интегрирования является ломаная OAB:

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию



$$\Phi(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C=$$

$$=\int\limits_{OA}\left(\frac{y\cdot 2^{y/x}}{x^2}\right)dx+\left(-\frac{2^{y/x}}{x}\right)dy+\int\limits_{AB}\left(\frac{y\cdot 2^{y/x}}{x^2}\right)dx+\left(-\frac{2^{y/x}}{x}\right)dy=$$

Отрезок OA: $y=0\to\ dy=0;\ \ 0\le x\le x$; отрезок OB: $x=const\to dx=0;\ \ 0\le y\le y$

$$\Phi(x,y)=\int\limits_{OA}\left(\frac{0\cdot 2^{0/x}}{x^2}\right)dx+0+\int\limits_{AB}0+\left(-\frac{2^{y/x}}{x}\right)dy$$

$$=\int\limits_0^x 0dx+\int\limits_0^y\left(-\frac{2^{y/x}}{x}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^y\left(-2^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}\right)dy=\int\limits_0^y\left(-2^{\frac{y}{x}}\right)d\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{2^{\frac{y}{x}}}{\ln 2}\Bigg|_0^y=-\frac{2^{\frac{y}{x}}}{\ln 2}+C$$

Ответ. $\Phi(x,y)=-\frac{2^{y/x}}{\ln 2}+C$