

Решение задачи Коши для дифференциального уравнения в частных производных

ЗАДАНИЕ.

Решить задачу Коши для уравнения в частных производных

$$u_{tt} - 2\Delta u = (x^2 + y^2 + z^2)t; \quad u|_{t=0} = xyz, \quad u_t|_{t=0} = x - y.$$

РЕШЕНИЕ.

Здесь $\bar{x} = (x, y, z)$, $u_0 = xyz$, $u_1 = x - y$.

Так как $a^2 = 2$ и $f(\bar{x}, t) = (x^2 + y^2 + z^2)t$, то по (47)

$$u_{n+2}(\bar{x}) = 2\Delta u_n(\bar{x}) + \frac{\partial^n f(\bar{x}, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$u_2 = 2\Delta u_0 + f(\bar{x}, t)|_{t=0} = 2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right) + 0 = 2(0 + 0 + 0) + 0 = 0,$$

$$u_3 = 2\Delta u_1 + \frac{\partial f(\bar{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + (x^2 + y^2 + z^2) = \\ = 2(0 + 0 + 0) + x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$u_4 = 2\Delta u_2 + \frac{\partial^2 f(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) + 0 = 0,$$

$$u_5 = 2\Delta u_3 + \frac{\partial^3 f(\bar{x}, t)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = 2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \right) + 0 = 4,$$

$$u_6 = 2\Delta u_4 + \frac{\partial^4 f(\bar{x}, t)}{\partial t^4} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$u_7 = 2\Delta u_5 + \frac{\partial^5 f(\bar{x}, t)}{\partial t^5} \Big|_{t=0} = 0, u_8, u_9, \dots = 0.$$

То есть, все остальные $u_{2k} = 0$ ($k \geq 3$) и $u_{2k+1} = 0$ ($k \geq 3$).

Подставляем найденные u_n в решение (46)

$$u(\bar{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_n(\bar{x}) = u_0 + tu_1 + \frac{t^2}{2!} u_2 + \frac{t^3}{3!} u_3 + \frac{t^4}{4!} u_4 + \frac{t^5}{5!} u_5 + \dots,$$

Задача по ДУ в ЧП скачана с https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maducp
(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= xyz + (x - y)t + \frac{t^3}{6}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{t^5}{120} \cdot 4 = \\ &= xyz + (x - y)t + \frac{t^3}{6}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{t^5}{30}.\end{aligned}$$

Окончательно,

$$u(x, y, z, t) = xyz + (x - y)t + \frac{t^3}{6}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{t^5}{30}..$$