Численные методы: решение СЛАУ в Excel

Решение систем линейных алгебраических уравнений СЛАУ

Решить систему *Ax*=*b*

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 0\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}2\\ -1.5\\ -7\end{pmatrix}$$

методом Гаусса (схема частичного выбора). Вычислить определитель и обратную матрицу для данной матрицы на основе метода Гаусса.

Решение

Преобразуем матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}-7\\ -1{,}5\\ 2\end{pmatrix}$$

Ведем расчеты в Excel.
Сначала выполняем прямой ход, получаем нули ниже главной диагонали.

A				B		
-4	2	1		-7		
1	3	0		-1,5		[· 4] + 1 строка
0	1	3		2		
-4	2	1		-7		
0	14	1		-13		
0	1	3		2		[· -14] + 2 строка
-4	2	1		-7		
0	14	1		-13		
0	0	-41		-41		

Далее выполняем обратный ход, получаем нули выше главной диагонали.

-4	2	1		-7		[· 41] + 3 строка
0	14	1		-13		[· 41] + 3 строка
0	0	-41		-41		
-164	82	0		-328		[· -574/82] + 2 строка
0	574	0		-574		
0	0	-41		-41		
1148	0	0		1722		
0	574	0		-574		
0	0	-41		-41		

Получаем преобразованную матрицу:

1148	0	0		1722
0	574	0		-574
0	0	-41		-41

$$A=\begin{pmatrix}1148 & 0 & 0\\ 0 & 574 & 0\\ 0 & 0 & -41\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}1722\\ -574\\ -41\end{pmatrix}$$

Откуда находим решение системы:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1722}{1148}=1{,}5\\ x_2=\dfrac{-574}{574}=-1\\ x_3=\dfrac{-41}{-41}=1\end{cases}$$

Определитель $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 0\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$:

$$\Delta=((0\cdot3\cdot1)+(1\cdot2\cdot3)+(1\cdot0\cdot-4))-((3\cdot3\cdot-4)+(1\cdot1\cdot1)+(0\cdot0\cdot2))=$$
$$=(1\cdot2\cdot3)-(3\cdot3\cdot-4)-(1\cdot1\cdot1)=6+36-1=41$$

Вычислим обратную матрицу для А.

Возьмём две матрицы: саму А и единичную Е.

Приведём матрицу А к единичной матрице методом Гаусса.

После применения каждой операции к первой матрице применим ту же операцию ко второй. Когда приведение первой матрицы к единичному виду будет завершено, вторая матрица окажется равной A^{-1}.

Запишем систему в виде:

$$A\,|\,\mathrm{E}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Последовательно будем выбирать разрешающий элемент РЭ, который лежит на главной диагонали матрицы.

Поскольку разрешающий элемент равен нулю, то поменяем строки матрицы.

1	3	0	0	1	0	0
0	1	3	1	0	0	0
-4	2	1	0	0	1	0

Разрешающий элемент равен 1.

На месте разрешающего элемента получаем 1, а в самом столбце записываем нули.

Все остальные элементы матрицы, включая элементы столбца B, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А*В)/РЭ

РЭ - разрешающий элемент (1), А и В - элементы матрицы, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1 / 1 = 1	3 / 1 = 3	0 / 1 = 0	0 / 1 = 0	1 / 1 = 1	0 / 1 = 0
$0-\frac{1 \bullet 0}{1} = 0$	$1-\frac{3 \bullet 0}{1} = 1$	$3-\frac{0 \bullet 0}{1} = 3$	$1-\frac{0 \bullet 0}{1} = 1$	$0-\frac{1 \bullet 0}{1} = 0$	$0-\frac{0 \bullet 0}{1} = 0$
$-4-\frac{1 \bullet (-4)}{1} = 0$	$2-\frac{3 \bullet (-4)}{1} = 14$	$1-\frac{0 \bullet (-4)}{1} = 1$	$0-\frac{0 \bullet (-4)}{1} = 0$	$0-\frac{1 \bullet (-4)}{1} = 4$	$1-\frac{0 \bullet (-4)}{1} = 1$

$$A\,|\,E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Разрешающий элемент равен 1.

На месте разрешающего элемента получаем 1, а в самом столбце записываем нули.

Все остальные элементы матрицы, включая элементы столбца B, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$1-\frac{0 \bullet 3}{1} = 1$	$3-\frac{1 \bullet 3}{1} = 0$	$0-\frac{3 \bullet 3}{1} = -9$	$0-\frac{1 \bullet 3}{1} = -3$	$1-\frac{0 \bullet 3}{1} = 1$	$0-\frac{0 \bullet 3}{1} = 0$
0 / 1 = 0	1 / 1 = 1	3 / 1 = 3	1 / 1 = 1	0 / 1 = 0	0 / 1 = 0
$0-\frac{0 \bullet 14}{1} = 0$	$14-\frac{1 \bullet 14}{1} = 0$	$1-\frac{3 \bullet 14}{1} = -41$	$0-\frac{1 \bullet 14}{1} = -14$	$4-\frac{0 \bullet 14}{1} = 4$	$1-\frac{0 \bullet 14}{1} = 1$

$$A\,|\,E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -9 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -41 & -14 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Разрешающий элемент равен -41.

На месте разрешающего элемента получаем 1, а в самом столбце записываем нули.

Все остальные элементы матрицы, включая элементы столбца B, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$1-\frac{0 \bullet (-9)}{-41} = 1$	$0-\frac{0 \bullet (-9)}{-41} = 0$	$-9-\frac{-41 \bullet (-9)}{-41} = 0$	$-3-\frac{-14 \bullet (-9)}{-41} = 0.0732$	$1-\frac{4 \bullet (-9)}{-41} = 0.12$	$0-\frac{1 \bullet (-9)}{-41} = -0.22$

$0-\frac{0 \cdot 3}{-41} = 0$	$1-\frac{0 \cdot 3}{-41} = 1$	$3-\frac{-41 \cdot 3}{-41} = 0$	$1-\frac{-14 \cdot 3}{-41} = -0.0244$	$0-\frac{4 \cdot 3}{-41} = 0.29$	$0-\frac{1 \cdot 3}{-41} = 0.0732$
0 / -41 = 0	0 / -41 = 0	-41 / -41 = 1	-14 / -41 = 0.34	4 / -41 = -0.0976	1 / -41 = -0.0244

$$A|\mathrm{E} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,0732 & 0,12 & -0,22 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0244 & 0,29 & 0,0732 \\ 0 & 0 & 1 & 0,34 & -0,0976 & -0,0244 \end{array}\right)$$

Обратная матрица A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 0,0732 & 0,122 & -0,22 \\ -0,0244 & 0,29 & 0,0732 \\ 0,34 & -0,0976 & -0,0244 \end{pmatrix}$$