

## Решение транспортной задачи методом потенциалов и дифференциальных рент при ограничениях

ЗАДАНИЕ.

Решить транспортную задачу

1) методом потенциалов (опорный план построить всеми известными способами);

2) методом дифференциальных рент;

3) любым методом при ограничениях:  $x_{24} \geq 4$ ,  $x_{35} \leq 5$ ,  $x_{12} = 3$ .

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13
14	16	26	12	24	3
14	5	2	19	27	2
14	29	23	25	16	8
14	2	25	14	15	21

РЕШЕНИЕ.

Т.к.  $\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^5 b_j = 56$ , имеем задачу с правильным балансом, её модель –

закрытая. Следовательно, задача имеет решение.

1. Решаем транспортную задачу методом потенциалов.

1) Опорный план строим методом северо-западного угла.

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13
14	16	26	12	24	3
14	13	1	10	19	27
14	5	4	25	11	16
14	29	23	3	15	8
14	2	25	14	1	21
					13

Проверяем правильность опорного решения.

Число занятых клеток должно быть равно  $N=m+n-1=4+5-1=8$ .

Метод вычёркивания также подтверждает, что векторы условий, соответствующие занятым клеткам, линейно независимы и построенное решение действительно является опорным.

Целевая функция при этом плане равна

$$Z = 13 \cdot 16 + 1 \cdot 26 + 4 \cdot 2 + 10 \cdot 19 + 3 \cdot 25 + 11 \cdot 16 + 1 \cdot 15 + 13 \cdot 21 = 971.$$

2) Опорный план строим методом минимальной стоимости.

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13
14	0 16	0 26	10 12	0 24	4 3
14	0 5	5 2	0 19	0 27	9 2
14	0 29	0 23	3 25	11 16	0 8
14	13 2	0 25	0 14	1 15	0 21

Проверяем правильность опорного решения.

Число занятых клеток должно быть равно  $N=4+5-1=8$ .

Целевая функция при этом плане равна

$$Z = 10 \cdot 12 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 3 \cdot 25 + 11 \cdot 16 + 13 \cdot 2 + 1 \cdot 15 = 452.$$

Этот опорный план даёт значительно меньшее значение целевой функции, чем опорный план, построенный методом северо-западного угла.

3) Опорный план строим методом двойного предпочтения.

Сначала в основной транспортной таблице ищутся клетки с минимальными стоимостями по строкам и помечаются галочкой, затем ищутся клетки с минимальными стоимостями по столбцам и также помечаются галочкой.

Далее схема аналогична методу минимальной стоимости, но сначала рассматриваются в порядке неубывания стоимости клетки с двумя галочками, а затем клетки, помеченные одной галочкой. В конце рассматриваются оставшиеся непомеченными свободные клетки, которые обрабатываются в точном соответствии с методом минимальной стоимости.

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13
14	0 16	0 26	V 12	0 24	V 3
14	0 5	VV 2	0 19	0 27	VV 2
14	0 29	0 23	3 25	11 16	V 8
14	VV 13 2	0 25	0 14	V 15	0 21

Число занятых клеток  $N=4+5-1=8$ . Целевая функция при этом плане равна

$$Z = 10 \cdot 12 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 3 \cdot 25 + 11 \cdot 16 + 13 \cdot 2 + 1 \cdot 15 = 452.$$

Этот опорный план даёт такое же значение целевой функции, как и опорный план, построенный методом минимальной стоимости.

4) Опорный план строим методом Фогеля.

На каждом шаге метода Фогеля для каждой  $i$ -й строки вычисляются штрафы  $d_i$  как разность между двумя наименьшими тарифами строки. Таким же образом вычисляются штрафы  $d_j$  для каждого  $j$ -го столбца. После чего выбирается максимальный штраф из всех

штрафов строк и столбцов. В строке или столбце, соответствующем выбранному штрафу, для заполнения выбирается не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом.

Если существует несколько одинаковых по величине максимальных штрафов в матрице, то в соответствующих строках или столбцах выбирается одна не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом.

Если клеток с минимальным тарифом также несколько, то из них выбирается клетка  $(i,j)$  с максимальным суммарным штрафом, т.е. суммой штрафов по  $i$ -й строке и  $j$ -му столбцу.

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13	$\Delta c_{ij}$
14	0 16	0 26	10 12	0 24	4 3	9,9,9,9,12*
14	0 5	5 2	0 19	0 27	9 2	3,3,17*
14	0 29	0 23	2 25	12 16	0 8	8,8,8,8,9,9,9*
14	13 2	0 25	1 14	0 15	0 21	12,12,1,1,1,1*
$\Delta c_{ij}$	3,3*	21*	2,2,2,2,2,11*	1,1,1,1,1,1*	1,1,1,5*	

Целевая функция при этом плане равна

$$Z = 10 \cdot 12 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 2 \cdot 25 + 12 \cdot 16 + 13 \cdot 2 + 1 \cdot 14 = 442.$$

Этот опорный план даёт наименьшее значение целевой функции.

Решаем транспортную задачу методом потенциалов, используя в качестве опорного план, построенный методом Фогеля.

Для проверки оптимальности опорного решения необходимо найти потенциалы заполненных клеток.

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 12 \\ u_1 + v_5 = 3 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_5 = 2 \\ u_3 + v_3 = 25 \\ u_3 + v_4 = 16 \\ u_4 + v_1 = 2 \\ u_4 + v_3 = 14 \end{cases}$$

Система состоит из 8 уравнений с 9-ю переменными. Система неопределённая. Одному из потенциалов можно задать значение произвольно: пусть  $u_1 = 0$ . Тогда получаем следующее решение системы:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0; & u_2 &= -1; & u_3 &= 13; & u_4 &= 2; \\ v_1 &= 0; & v_2 &= 3; & v_3 &= 12; & v_4 &= 3; & v_5 &= 3. \end{aligned}$$

		$v_1 = 0$	$v_2 = 3$	$v_3 = 12$	$v_4 = 3$	$v_5 = 3$
$a_i \backslash b_j$		13	5	13	12	13
$u_1 = 0$	14	16	26	10 12	24	4 3
$u_2 = -1$	14	5	5 2	19	27	9 2
$u_3 = 13$	14	29	23	2 25	16	8
$u_4 = 2$	14	2	25	1 14	15	21

Проверяем опорное решение на оптимальность. С этой целью вычисляем оценки  $\Delta_{ij}$  для всех незаполненных клеток таблицы.

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 0 - 16 = -16 < 0;$$

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 26 = -23 < 0;$$

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 3 - 24 = -21 < 0;$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -1 + 0 - 5 = -6 < 0;$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -1 + 12 - 19 = -8 < 0;$$

$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -1 + 3 - 27 = -25 < 0$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 13 + 0 - 29 = -16 < 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 13 + 3 - 23 = -7 < 0;$$

$$\Delta_{35} = u_3 + v_5 - c_{35} = 13 + 3 - 8 = 8 > 0;$$

$$\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = 2 + 3 - 25 = -20 < 0$$

$$\Delta_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = 2 + 3 - 15 = -10 < 0;$$

$$\Delta_{45} = u_4 + v_5 - c_{45} = 2 + 3 - 21 = -16 < 0.$$

Начальное опорное решение не является оптимальным, т.к. имеется положительная оценка в клетке (3,5).

Переходим к новому опорному решению. Для клетки (3,5) строим цикл и перераспределяем величину груза  $\theta=2$  (минимальное значение в четных клетках цикла).

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13
14	16	26	10 + 12	24	4 - 3
14	5	5 2	19	27	9 2
14	29	23	2 25	16	+ 8
14	2	25	1 14	15	21

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13
14	16	26	12 12	24	2 3

14	5	2	19	27	9	2
14	29	23	25	16	2	8
14	13	2	25	14	15	21

Стоимость перевозок при этом плане равна 426.

Проверяем его на оптимальность. Находим потенциалы для заполненных клеток и вычисляем оценки для незаполненных клеток таблицы.

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 12 \\ u_1 + v_5 = 3 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_5 = 2 \\ u_3 + v_4 = 16 \\ u_3 + v_5 = 8 \\ u_4 + v_1 = 2 \\ u_4 + v_3 = 14 \end{cases}$$

$$u_1 = 0; \quad u_2 = -1; \quad u_3 = 5; \quad u_4 = 2;$$

$$v_1 = 0; \quad v_2 = 3; \quad v_3 = 12; \quad v_4 = 11; \quad v_5 = 3.$$

		$v_1 = 0$	$v_2 = 3$	$v_3 = 12$	$v_4 = 11$	$v_5 = 3$
$a_i \backslash b_j$		13	5	13	12	13
$u_1 = 0$	14	16	26	12	24	3
$u_2 = -1$	14	5	2	19	27	2
$u_3 = 5$	14	29	23	25	16	8
$u_4 = 2$	14	13	2	25	14	15
				1		21

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 0 - 16 = -16 < 0;$$

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 26 = -23 < 0;$$

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 11 - 24 = -13 < 0;$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -1 + 0 - 5 = -6 < 0;$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -1 + 12 - 19 = -8 < 0;$$

$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -1 + 11 - 27 = -17 < 0$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 5 + 0 - 29 = -24 < 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 5 + 3 - 23 = -15 < 0;$$

$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 5 + 12 - 25 = -8 < 0;$$

$$\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = 2+3-25 = -20 < 0$$

$$\Delta_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = 2+11-15 = -2 < 0;$$

$$\Delta_{45} = u_4 + v_5 - c_{45} = 2+3-21 = -16 < 0.$$

Решение является оптимальным, т.к. все оценки отрицательные.

Оптимальный план:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 2 \\ 13 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значение целевой функции при оптимальном плане равно  $Z_{\min} = 426$

2. Решаем транспортную задачу методом дифференциальных рент.

*Первая итерация.*

В каждом столбце отметим минимальный показатель затрат  $c_{ij}$ .

Распределение продукции по клеткам с выделенными минимальными значениями тарифов начинается с первого столбца, при этом в клетку записывается поставка

$$x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}.$$

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13	Оценка поставщиков		
14	16	26	13	12	24	3	+1	
14	5	5	2	19	27	9	2	-4
14	29	23	25	16	8		+14	
14	13	2	25	14	1	15	21	-11
Разность тарифов	14	21	-	1	1			

Нераспределённый остаток равен  $1+14 = 15$ .

Эта схема распределения не является допустимым планом поставок, т.е. не является решением задачи. В связи с этим далее необходимо произвести оценку каждого поставщика и использовать их свободные ресурсы.

Разность тарифов – это разность наименьшего тарифа в положительных строках и отмеченного тарифа в этом столбце. Если в столбце есть отмеченный тариф в положительной строке, то ставим -. Наименьшая из вычисленных разностей – это промежуточная рента.

*Вторая итерация.*

По отрицательным строкам тарифы увеличиваем на величину промежуточной ренты. Тарифы по положительным строкам переписываем в новую таблицу без изменения.

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13	Оценка поставщиков
14	16	26	<u>12</u>	24	<u>3</u>	-3
14	6	<u>3</u>	20	28	<u>3</u>	-0
14	29	23	25	<u>16</u>	8	+2
14	<u>3</u>	26	15	<u>16</u>	22	+1
Разность тарифов	-	20	<u>3</u>	-	5	

Нераспределённый остаток равен  $2+1 = 3$ .

*Третья итерация.*

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13	Оценка поставщиков
14	19	29	<u>15</u>	27	<u>6</u>	-2
14	9	<u>6</u>	23	31	<u>6</u>	-0
14	29	23	25	<u>16</u>	8	+2
14	<u>3</u>	26	<u>15</u>	<u>16</u>	22	-0
Разность тарифов	26	17	10	-	<u>2</u>	

Нераспределённый остаток равен 2.

*Четвёртая итерация.*

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	12	13	Оценка поставщиков
14	21	31	<u>17</u>	29	<u>8</u>	
14	11	<u>8</u>	25	33	<u>8</u>	
14	29	23	25	<u>16</u>	<u>8</u>	
14	<u>5</u>	28	<u>17</u>	18	24	
Разность тарифов						

Нераспределённый остаток равен 0, следовательно, получен допустимый оптимальный план.

3. Дополнительные ограничения:  $x_{24} \geq 4$ ,  $x_{35} \leq 5$ ,  $x_{12} = 3$ .

Рассмотрим вначале последнее ограничение  $x_{12} = 3$ . Поставим в клетку (1,2) число 3, а на

месте тарифа в этой клетке поставим знак  $\infty$ .

Рассмотрим ограничение  $x_{24} \geq 4$ . Уменьшим запасы  $a_2$  и потребности  $b_4$  на 4, а после получения оптимального плана опять увеличим.

Рассмотрим ограничение  $x_{35} \leq 5$ . Вводим дополнительный столбец, т.е. дополнительный пункт назначения. В этом столбце запишем те же тарифы, что и в пятом столбце за

исключением тарифа, находящегося в 3-й строке, который будет равен  $\infty$ . При этом

потребности пункта  $b_5$  будут равны 5, а потребности вновь введенного пункта назначения будут равны  $13-5=8$ .

Заполняем таблицу:

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	8	5	8
14	16	$\infty$	12	24	3	3
10	5	2	19	27	2	2
14	29	23	25	16	8	$\infty$
14	2	25	14	15	21	21

Решаем задачу распределительным методом.

Первоначальный план строим методом минимальной стоимости.

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	8	5	8
14	16	$\infty$	12	24	3	3
		3	6			5

10	5	2	2	19	27	2	3	2
14	29	23	25	16	8			$\infty$
14	13	2	25	1	14	15	21	21

Проверяем правильность опорного решения.

Число занятых клеток должно быть равно  $N=m+n-1=4+6-1=10$ .

Значение целевой функции при первоначальном плане равно:

$$Z = 3 \cdot 26 + 6 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 25 + 8 \cdot 16 + 13 \cdot 2 + 1 \cdot 14 = 503.$$

Строим циклы пересчёта для свободных клеток и находим их оценки:

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	8	5	8
14	+ 16	$\infty$	6	12	24	3
10	5	2	19	27	2	2
14	29	23	25	16	8	$\infty$
14	-13	2	25	1	14	15

$$\gamma_{11} = (16+14) - (12+2) = 16 > 0;$$

$$\gamma_{21} = (5+\infty) - (16+2) > 0;$$

$$\gamma_{31} = (29+14) - (2+25) > 0;$$

$$\gamma_{32} = (23+12) - (6+\infty) < 0;$$

$$\gamma_{42} = (25+12) - (14+\infty) < 0;$$

$$\gamma_{23} = (19+\infty) - (2+12) > 0;$$

$$\gamma_{14} = (24+25) - (16+12) > 0;$$

$$\gamma_{24} = (27+5+25) - (2+12+8) > 0;$$

$$\gamma_{44} = (15+25) - (14+16) > 0;$$

$$\gamma_{15} = (3+2) - (3+2) = 0;$$

$$\gamma_{35} = (8+12+2) - (25+3+2) < 0;$$

$$\gamma_{45} = (21+12+2) - (14+3+2) > 0;$$

$$\gamma_{46} = (21+12) - (14+3) > 0.$$

Есть отрицательные оценки, поэтому решение не является оптимальным и его можно улучшить, перемещая перевозку по циклу.

Циклы, которые проходят через клетки с бесконечными тарифами не используем.

Переносим  $x_{24} = 5$  по циклу и заполняем клетку (3,4), которая имеет отрицательную оценку.

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	8	5	8
14	16	$\infty$	6 + 12	24	3	-5 3
10	5	2	2	19	27	5 - 2 + 3 2
14	29	23	6 - 25	16	8	$\infty$
14	2	25	14	15	21	21
	13		1			

$a_i \backslash b_j$	13	5	13	8	5	8
14	16	$\infty$	12	24	3	3
10	5	2	2	19	27	2 8 2
14	29	23	25	16	8	$\infty$
14	2	25	14	15	21	21
	13		1			

Значение целевой функции при этом плане равно:

$$Z = 3 \cdot 26 + 11 \cdot 12 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 1 \cdot 25 + 8 \cdot 16 + 5 \cdot 8 + 13 \cdot 2 + 1 \cdot 14 + 0 \cdot 3 = 463.$$



Задача скачана с сайта [www.MatBuro.ru](http://www.MatBuro.ru)

©МатБюро - Решение контрольных работ по линейному программированию

13	0	1	0	0
----	---	---	---	---

Значение целевой функции  $Z = 571$ .