

Решение транспортной задачи методом потенциалов

ЗАДАНИЕ.

В таблице приведены исходные данные транспортной задачи: заданы удельные транспортные расходы на перевозку единицы груза, слева указаны возможности поставщиков, а сверху – спрос потребителей.

Сформулируйте экономико-математическую модель транспортной задачи, распределительным методом найдите оптимальный план перевозок.

Поставщики	Возможности поставщиков	Потребители и их спрос				
		I	II	III	IV	V
		150	350	200	100	100
I	500	3	3	5	3	1
II	300	4	3	2	4	5
III	100	3	7	5	4	2

РЕШЕНИЕ.

Составим математическую модель транспортной задачи и проверим задачу на замкнутость.

Введем обозначения: x_{ij} – количество поставщиков, перевозимых из i -го пункта к j -му потребителю ($i=1:m$, $j=1:n$, в нашей задаче $m=3$, $n=5$);

a_i – возможности поставщиков ($a_1=500$, $a_2=300$, $a_3=100$);

b_j – спрос потребителей ($b_1=150$, $b_2=350$, $b_3=200$, $b_4=100$, $b_5=100$);

c_{ij} – стоимости перевозок из пункта i в пункт j

размещения. Целевая функция $L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$. В нашей задаче

$$L = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min.$$

Проверим условие того, что данная модель задачи закрытая:

$$150+350+200+100+100=900 \text{ и } 500+300+100=900.$$

Строим начальный опорный план перевозок методом минимальной стоимости. Начинаем с клетки (1,4) – стоимость наименьшая, ставим перевозку $x_{14}=100$ максимальную из возможных. Потребителю b_4 в клетку (1,4) также ставим максимальную перевозку из возможных $x_{14}=100$ единиц груза. 200 единиц груза отправим потребителю a_3 и 100 единиц груза потребителю a_2 . После этого запасы поставщика a_1 полностью израсходованы. Но потребитель b_2 нуждается ещё в 250 единицах груза. Удовлетворим его за счёт запасов поставщика a_2 , ставим в клетку (2,2) перевозку 250 единиц груза. Но в запасе у поставщика a_2 осталось 50 единиц груза, удовлетворим ими потребителя b_1 . Запасы

поставщика a_2 исчерпались. Но потребитель b_1 нуждается в 100 единицах груза, удовлетворим его за счёт запасов поставщика a_3 .

Итак, все запасы поставщиков распределены, все потребители удовлетворены. В результате заполним таблицу 1.

Количество базисных клеток $m+n-1=3+5-1=7$ - совпадает с полученным. Следовательно, план не вырожден.

Таблица 1

	150	350	200	100	100	U_i
500	3	(+) 3 100	(-) 5 200	3	1	0
300	4	(-) 3 250	(+) 2	4	5	0
100	3	7	5	4	2	-1
V_j	4	3	5	3	1	

Найдём стоимость перевозок на X_1 - плане перевозок из таблицы 1:

$$Z_1 = 100 \cdot 3 + 200 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 4 + 250 \cdot 3 + 100 \cdot 3 = 2850 \text{ ден. ед.}$$

Подсчёт потенциалов осуществим по условию: $U_i + V_j = c_{ij}$. Общий принцип потенциалов: находят базисную клетку, для которой один из потенциалов известен, и подбирают второй так, чтобы в сумме они давали тариф перевозки (в верхнем правом углу клетки). Задаём один из потенциалов (любой) равным нулю, например $U_2 = 0$.

$$(1,2) U_1 + V_2 = 3$$

$$(1,3) U_1 + V_3 = 5$$

$$(1,4) U_1 + V_4 = 3$$

$$(1,5) U_1 + V_5 = 1$$

$$(2,1) U_2 + V_1 = 4$$

$$(2,2) U_2 + V_2 = 3$$

$$(3,1) U_3 + V_1 = 3$$

$$V_1 = 4, V_2 = 3, U_3 = -1, U_1 = 0, V_3 = 5, V_4 = 3, V_5 = 1.$$

Проверим условие оптимальности в свободных клетках по условию:

$$U_i + V_j \leq c_{ij}.$$

$$(1,1) U_1 + V_1 \leq c_{11} \Rightarrow 0 + 4 \leq 3 \text{ - условие не выполняется}$$

$$(2,3) U_2 + V_3 \leq c_{23} \Rightarrow 0 + 5 \leq 2 \text{ - условие не выполняется}$$

$$(2,4) U_2 + V_4 \leq c_{24} \Rightarrow 0 + 3 \leq 4$$

$$(2,5) U_2 + V_5 \leq c_{25} \Rightarrow 0 + 1 \leq 5$$

$$(3,2) U_3 + V_2 \leq c_{32} \Rightarrow -1 + 3 \leq 7$$

$$(3,3) U_3 + V_3 \leq c_{33} \Rightarrow -1 + 5 \leq 5$$

$$(3,4) U_3 + V_4 \leq c_{34} \Rightarrow -1 + 3 \leq 4$$

$$(3,5) U_3 + V_5 \leq c_{35} \Rightarrow -1 + 1 \leq 2$$

В двух клетках условие оптимальности плана не выполняется, следовательно, требуется улучшение плана. Способ улучшения плана – переброска груза по циклу.

Переброска груза осуществляется так. Каждой клетке цикла присваивают знаки (+) или (-) чередуют их, начиная с (+) в свободной клетке, в которой не выполняется условие оптимальности. Затем выбирают наименьшую перевозку из базисных клеток со знаком (-) и прибавляют её в клетку со знаком (+) и вычитают в клетках со знаком (-). Так как клеток несколько, где не выполняется условие, выбираем ту, у которой разность $|U_i + V_j - c_{ij}|$ – наибольшая – это клетка (2,3).

Построим цикл, начиная с клетки (2,3) осуществим переброску 200 ед. груза по циклу. Получим таблицу 2 с новым планом перевозки.

Таблица 2

	150	350	200	100	100	U_i
500	(+) 3	(-) 3 300	5	3	1	0
300	(-) 4 50	(+) 3 50	2	4	5	0
100	3	7	5	4	2	-1
V_j	4	3	2	3	1	

Найдём стоимость перевозок на X_2 плане перевозок из таблицы 2:

$Z_2 = 300 \cdot 3 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 1 + 50 \cdot 4 + 50 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 100 \cdot 3 = 2350$ ден.ед. Очевидно, что она стала меньше по сравнению с Z_1 .

Снова проверим условие на оптимальность, вычислив потенциалы по базисным клеткам и проверив условие в свободных.

$$(1,2) U_1 + V_2 = 3$$

$$(1,4) U_1 + V_4 = 3$$

$$(1,5) U_1 + V_5 = 1$$

$$(2,1) U_2 + V_1 = 4$$

$$(2,2) U_2 + V_2 = 3$$

$$(2,3) U_2 + V_3 = 2$$

$$(3,1) U_3 + V_1 = 3$$

$$U_2 = 0, V_1 = 4, V_2 = 3, V_3 = 2, U_3 = -1, U_1 = 0, V_4 = 3, V_5 = 1.$$

Для свободных клеток.

$$(1,1) U_1 + V_1 \leq c_{11} \Rightarrow 0 + 4 \leq 3 \text{ - условие не выполняется.}$$

$$(1,3) U_1 + V_3 \leq c_{13} \Rightarrow 0 + 2 \leq 5$$

$$(2,4) U_2 + V_4 \leq c_{24} \Rightarrow 0 + 3 \leq 4$$

$$(2,5) U_2 + V_5 \leq c_{25} \Rightarrow 0 + 1 \leq 5$$

$$(3,2) U_3 + V_2 \leq c_{32} \Rightarrow -1 + 3 \leq 7$$

$$(3,3) U_3 + V_3 \leq c_{33} \Rightarrow -1 + 2 \leq 5$$

$$(3,4) U_3 + V_4 \leq c_{34} \Rightarrow -1 + 3 \leq 4$$

$$(3,5) U_3 + V_5 \leq c_{35} \Rightarrow -1 + 1 \leq 2.$$

В первой клетке условие оптимальности не выполняется, требуется улучшение плана, осуществим переброску груза на 50 единиц по циклу, начиная с клетки (1,1). Получим таблицу 3 с новым планом перевозок.

Таблица 3

	150	350	200	100	100	U_i
500	50 3	250 3	5 5	100 3	100 1	0
300	4	100 3	200 2	4 4	5 5	0
100	100 3	7	5 5	4 4	2 2	0
V_j	3	3	2	3	1	

Найдём стоимость перевозок на X_3 плане перевозок из таблицы 2:

$Z_3 = 50 \cdot 3 + 250 \cdot 3 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 1 + 100 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 100 \cdot 3 = 2300$ ден.ед. Очевидно, что она стала меньше по сравнению с Z_2 .

Снова проверим план на оптимальность.

Для базисных клеток.

$$(1,1) U_1 + V_1 = 3$$

$$(1,2) U_1 + V_2 = 3$$

$$(1,4) U_1 + V_4 = 3$$

$$(1,5) U_1 + V_5 = 1$$

$$(2,2) U_2 + V_2 = 3$$

$$(2,3) U_2 + V_3 = 2$$

$$(3,1) U_3 + V_1 = 3$$

$$U_2 = 0, V_2 = 3, V_3 = 2, U_1 = 0, V_1 = 3, V_2 = 3, V_4 = 3, V_5 = 1.$$

Для свободных клеток.

$$(1,3) U_1 + V_3 \leq c_{13} \Rightarrow 0 + 2 \leq 5$$

$$(2,1) U_2 + V_1 \leq c_{21} \Rightarrow 0 + 3 \leq 4$$

$$(2,4) U_2 + V_4 \leq c_{24} \Rightarrow 0 + 3 \leq 4$$

$$(2,5) U_2 + V_5 \leq c_{25} \Rightarrow 0 + 1 \leq 5$$

$$(3,2) U_3 + V_2 \leq c_{32} \Rightarrow 0 + 3 \leq 7$$

$$(3,3) U_3 + V_3 \leq c_{33} \Rightarrow 0 + 2 \leq 5$$

$$(3,4) U_3 + V_4 \leq c_{34} \Rightarrow 0 + 3 \leq 4$$

$$(3,5) U_3 + V_5 \leq c_{35} \Rightarrow 0 + 1 \leq 2$$

Вывод: получили оптимальный план перевозок.

$$\begin{pmatrix} 50 & 250 & 0 & 100 & 100 \\ 0 & 100 & 200 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При этом стоимость минимальна и составляет 2300 денежных единиц.