Тема: Восстановление аналитической функции

Задание. *Найти аналитическую функцию f(z), если задана ее мнимая часть* $\mathrm{Im} f(z) = 10xy - 6y$ *и* $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$.

Решение. Так как функция аналитическая, выполняется условия Коши-Римана.

Пусть $u = \mathrm{Re}\, f, v = \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Тогда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(10xy - 6y) = 10x - 6$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 10x - 6 \Rightarrow u = 5x^2 - 6x + \varphi(y)$$

Из второго условия Коши-Римана получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^2 - 6x + \varphi(y)\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(10xy - 6y)$$

$$\varphi'(y) = -10y$$

$$\varphi(y) = -5y^2 + C$$

Значит, вещественная часть имеет вид $u = 5x^2 - 6x - 5y^2 + C$

Так как $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$, можно найти постоянную:

$$-1 = 5\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 6\frac{1}{5} - 5 \cdot 0^2 + C \Rightarrow C = 0.$$

Значит, искомая функция имеет вид:

$$f = 5x^2 - 6x - 5y^2 + (10xy - 6y)i$$

Ответ: $f = 5x^2 - 6x - 5y^2 + (10xy - 6y)i$