

Тема: Линейное программирование

ЗАДАНИЕ. Компания производит полки для ванн двух размеров – А и В. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2 м^2 материала, а для полки типа В – 3 м^2 материала. Компания может получить до 1200 м^2 материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин машинного времени, а для изготовления одной полки типа В – 30 мин; машину можно использовать 160 час в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 денежных единицы, а от полок типа В – 4 ден. ед., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

РЕШЕНИЕ. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 – количество полок вида А, x_2 – количество полок вида В, которые производятся в неделю (по смыслу задачи эти переменные неотрицательны). Прибыль от продажи такого количества полок составит $3x_1 + 4x_2$, прибыль требуется максимизировать. Выпишем ограничения задачи.

$x_1 + x_2 \leq 550$ – в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок.

Затраты материала: $2x_1 + 3x_2 \leq 1200$

Затраты машинного времени: $12x_1 + 30x_2 \leq 9600$.

Таким образом, приходим к задаче линейного программирования.

$$f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 \leq 550,$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1200,$$

$$12x_1 + 30x_2 \leq 9600,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Решим ее симплекс-методом. Введем три дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 и придем к задаче

$$f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 550,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1200,$$

$$12x_1 + 30x_2 + x_5 = 9600,$$

$$x_i \geq 0, i=1,2,3,4,5.$$

В качестве опорного плана выберем $X_0=(0, 0, 550, 1200, 9600)$. Составим симплекс-таблицу.

Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	550	1	1	1	0	0
x_4	1200	2	3	0	1	0
x_5	9600	12	30	0	0	1
f	0	-3	-4	0	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным). Аналогично будем повторять шаги, пока не придем к таблице с неотрицательными оценками.

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x3	230	3/5	0	1	0	-1/30
x4	240	4/5	0	0	1	-1/10
x2	320	2/5	1	0	0	1/30
f	1280	-7/5	0	0	0	2/15

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x3	50	0	0	1	-3/4	1/24
x1	300	1	0	0	5/4	-1/8
x2	200	0	1	0	-1/2	1/12
f	1700	0	0	0	7/4	-1/24

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x5	1200	0	0	24	-18	1
x1	450	1	0	3	-1	0
x2	100	0	1	-2	1	0
f	1750	0	0	1	1	0

В последнем плане строка f не содержит отрицательных значений, план $x_1 = 450$, $x_2 = 100$ оптимален, целевая функция принимает значение 1750.

Таким образом, чтобы получить максимальную прибыль, предприятию необходимо производить 450 полок вида А и 100 полок вида В, при этом прибыль составит 1750 ден. ед., а останется неиспользованными 1200 минут (20 часов) машинного времени.