

Тема: Числовые и функциональные ряды

ЗАДАНИЕ. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$$

РЕШЕНИЕ:

Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-7)\ln^2(4n-7)}$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)} : \frac{1}{(4n-7)\ln^2(4n-7)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-5}{4n-7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-5/n}{4-7/n} = \frac{3}{4} \neq 0, \infty.$$

то если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-7)\ln^2(4n-7)}$ сходится, то исходный также сходится по предельному признаку сравнения.

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-7)\ln^2(4n-7)}$.

Используем интегральный признак Коши. Рассмотрим соответствующий несобственный

интеграл $\int_3^{\infty} \frac{dx}{(4x-7)\ln^2(4x-7)}$ от положительной убывающей функции

$f(x) = \frac{1}{(4x-7)\ln^2(4x-7)}$. Исследуем его сходимость.

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{dx}{(4x-7)\ln^2(4x-7)} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_3^A \frac{dx}{(4x-7)\ln^2(4x-7)} = \frac{1}{4} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_3^A \frac{d(\ln(4x-7))}{\ln^2(4x-7)} = \left| \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln(4x-7)} \right) \Big|_3^A = \frac{1}{4} \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln(4A-7)} + \frac{1}{\ln(12-7)} \right) = \frac{1}{4 \ln 5} < \infty. \end{aligned}$$

Интеграл сходится, значит, исходный ряд также сходится.