

Пример решения задачи по дискретной математике

Тема: Бинарные отношения

На множестве вещественных чисел \mathbf{R} задано бинарное отношение $a \rho b \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$. Докажите, что ρ – отношение эквивалентности. Сколько элементов в классе эквивалентности?

Решение.

Проверим выполнение 3 свойств отношений эквивалентности:

1) $a \rho a \Leftrightarrow a^2 + a = a^2 + a$ - верно. Следовательно, ρ - рефлексивно.

2) $a \rho b \Leftrightarrow b \rho a \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b \Leftrightarrow b^2 + b = a^2 + a$ - верно. Следовательно, ρ - симметрично.

3) $a \rho b \wedge b \rho c \rightarrow a \rho c \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b \wedge b^2 + b = c^2 + c \rightarrow a^2 + a = c^2 + c$ - верно.

Следовательно, ρ - транзитивно.

Следовательно, ρ - отношение эквивалентности.

Заметим, что число элементов в классе эквивалентности равно числу корней уравнения:

$$x^2 + x = a^2 + a$$

Т.к. это квадратное уравнение с положительным дискриминантом, то корней всегда 2, вне зависимости от величины a . Следовательно, в каждом классе эквивалентности 2 элемента.