Функции корреляции случайного процесса

Пример решения задачи

Задача. Найти взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t_1,t_2)$ и взаимную нормированную корреляционную функцию $\rho_{xy}(t_1,t_2)$ двух случайных функций $X(t)=A\sin t+B\cos t$ и $Y(t)=Ae^{t}+Be^{-t}$, если известно, что дисперсии случайных величины A и B равны: $DA=4$, $DB=4$, коэффициент ковариации $\operatorname{cov}(A,B)=-4$.

Решение.

Найдем математическое ожидание случайной функции $X(t)$

$$M(X(t))=M_x(t)=M(A\sin t+B\cos t)=M(A)\sin t+M(B)\cos t$$

Центрированная функция

$$\overset{0}{X}(t)=X(t)-M_x(t)=A\sin t+B\cos t-M(A)\sin t-M(B)\cos t=$$
$$=(A-M(A))\sin t+(B-M(B))\cos t.$$

Аналогично для $Y(t)$:

$$M(Y(t))=M_y(t)=M\left(Ae^{t}+Be^{-t}\right)=M(A)e^{t}+M(B)e^{-t}$$

Центрированная функция

$$\overset{0}{Y}(t)=Y(t)-M_y(t)=Ae^{t}+Be^{-t}-M(A)e^{t}-M(B)e^{-t}=$$
$$=(A-M(A))e^{t}+(B-M(B))e^{-t}.$$

Взаимная корреляционная функция:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M\left[\overset{0}{X}(t_1)\cdot\overset{0}{Y}(t_2)\right]=$$
$$=M\left[\left((A-M(A))\sin t_1+(B-M(B))\cos t_1\right)\cdot\left((A-M(A))e^{t_2}+(B-M(B))e^{-t_2}\right)\right]=$$
$$=M\left[\begin{pmatrix}(A-M(A))\sin t_1(A-M(A))e^{t_2}+(B-M(B))\cos t_1(A-M(A))e^{t_2}+\\+(A-M(A))\sin t_1(B-M(B))e^{-t_2}+(B-M(B))\cos t_1(B-M(B))e^{-t_2}\end{pmatrix}\right]=$$
$$=M\left[\begin{pmatrix}\sin t_1e^{t_2}(A-M(A))^2+\cos t_1e^{t_2}(A-M(A))(B-M(B))+\\+\sin t_1e^{-t_2}(A-M(A))(B-M(B))+\cos t_1e^{-t_2}(B-M(B))^2\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\sin t_1e^{t_2}M\left[(A-M(A))^2\right]+\left(\cos t_1e^{t_2}+\sin t_1e^{-t_2}\right)M\left[(A-M(A))(B-M(B))\right]+$$
$$+\cos t_1e^{-t_2}M\left[(B-M(B))^2\right]=$$
$$=\sin t_1e^{t_2}DA+\left(\cos t_1e^{t_2}+\sin t_1e^{-t_2}\right)\operatorname{cov}(A,B)+\cos t_1e^{-t_2}DB=$$
$$=4\left[\sin t_1e^{t_2}-\cos t_1e^{t_2}-\sin t_1e^{-t_2}+\cos t_1e^{-t_2}\right].$$

Найдем корреляционные функции для $X(t)$ и $Y(t)$. Получим:

$K_x(t_1,t_2) = DA\cdot\sin t_1\sin t_2 + DB\cdot\cos t_1\cos t_2 = 4(\sin t_1\sin t_2 + \cos t_1\cos t_2).$

$K_y(t_1,t_2) = DA\cdot e^{t_1}e^{t_2} + DB\cdot e^{-t_1}e^{-t_2} = 4\left(e^{t_1}e^{t_2} + e^{-t_1}e^{-t_2}\right).$

Тогда дисперсии равны:

$D_x(t) = K_x(t,t) = 4\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = 4.$

$D_y(t) = K_y(t,t) = 4\left(e^{2t} + e^{-2t}\right).$

Нормированная взаимная корреляционная функция

$$\rho_{xy}(t_1,t_2) = \frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)}\cdot\sqrt{D_y(t_2)}} = \frac{4\left[\sin t_1 e^{t_2} - \cos t_1 e^{t_2} - \sin t_1 e^{-t_2} + \cos t_1 e^{-t_2}\right]}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{4\left(e^{2t_2} + e^{-2t_2}\right)}} =$$

$$= \frac{\sin t_1 e^{t_2} - \cos t_1 e^{t_2} - \sin t_1 e^{-t_2} + \cos t_1 e^{-t_2}}{\sqrt{\left(e^{2t_2} + e^{-2t_2}\right)}}.$$