Прикладная математика

Пример решения задачи межотраслевого баланса

Задача. *Пусть балансовый отчет для трёхотраслевой модели экономики имеет вид:*

Номер производящей отрасли	Валовый выпуск продукции в отрасли	Потреблено продукции в отрасли		
		1	2	3
1	300	40	30	a
2	200	b	50	60
3	250	20	c	100

Требуется:

а) записать балансовые соотношения и определить объём конечной продукции в каждой отрасли;

б) найти матрицу прямых затрат А и выяснить её продуктивность;

в) найти матрицу полных затрат $S=(E-A)^{-1}$ *(для избежания ошибок проверить, выполняются ли равенства S(E-A)=(E-A)S=E);*

г) для нового вектора конечной продукции найти вектор валовой продукции X по формуле X = SY.

№ задачи	a	b	c	y_1	y_2	y_3
71	40	40	40	250	150	300

Решение. Запишем таблицу для данных варианта:

Номер производящей отрасли (i)	Потреблено продукции в отрасли (j)			Валовой выпуск продукции отрасли (xi)
	1	2	3	
1	40	30	40	300
2	40	50	60	200
3	20	40	100	250

1) Основное балансовое соотношение имеет вид: $x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + y_i$, $i = 1,2,3$.

Найдем из него объем конечной продукции: $y_i = x_i - x_{i1} - x_{i2} - x_{i3}$, $i = 1,2,3$.

Получаем:

$$y_1 = x_1 - x_{11} - x_{12} - x_{13} = 300 - 40 - 30 - 40 = 190,$$

$$y_2 = x_2 - x_{21} - x_{22} - x_{23} = 200 - 40 - 50 - 60 = 50,$$

$$y_3 = x_3 - x_{31} - x_{32} - x_{33} = 250 - 20 - 40 - 100 = 90.$$

Вектор конечной продукции: $Y = \begin{pmatrix} 190 \\ 50 \\ 90 \end{pmatrix}$.

2) Запишем матрицу прямых затрат A, элементы a_{ij} которой (коэффициенты прямых затрат) имеют вид:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \qquad i, j = 1,2,3,$$

где x_{ij} - часть объема валовой продукции отрасли i, потребляемая отраслью j производственного цикла $(i, j = 1,2,3)$.

Получаем:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{40}{300} = 0{,}133,$$

$$a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{30}{200} = 0{,}15,$$

$$a_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = \frac{40}{250} = 0{,}16$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{40}{300} = 0{,}133,$$

$$a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{50}{200} = 0{,}25,$$

$$a_{23} = \frac{x_{23}}{x_3} = \frac{60}{250} = 0{,}24,$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{x_1} = \frac{20}{300} = 0{,}067,$$

$$a_{32} = \frac{x_{32}}{x_2} = \frac{40}{200} = 0{,}2,$$

$$a_{33} = \frac{x_{33}}{x_3} = \frac{100}{250} = 0{,}4.$$

Получили матрицу: $A = \begin{pmatrix} 0{,}133 & 0{,}15 & 0{,}16 \\ 0{,}133 & 0{,}25 & 0{,}24 \\ 0{,}067 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Проверим ее продуктивность. Используем достаточный критерий продуктивности:

$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} < 1, i = 1, 2, 3.$ Действительно:

0,133+0,15+0,16<1;

0,133+0,25+0,24<1;

0,067+0,2+0,4<1.

$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} < 1,\ j = 1,2,3.$ Действительно:

0,133+0,133+0,067<1;

0,15+0,25+0,2<1;

0,16+0,24+0,4<1.

Поэтому матрица A продуктивна.

3) Найдем матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1}$. Сначала найдем матрицу

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,133 & 0,15 & 0,16 \\ 0,133 & 0,25 & 0,24 \\ 0,067 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,867 & -0,15 & -0,16 \\ -0,133 & 0,75 & -0,24 \\ -0,067 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем обратную к ней матрицу. Сначала вычислим определитель:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0,867 & -0,15 & -0,16 \\ -0,133 & 0,75 & -0,24 \\ -0,067 & -0,2 & 0,6 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,867 \cdot \begin{vmatrix} 0,75 & -0,24 \\ -0,2 & 0,6 \end{vmatrix} + 0,15 \cdot \begin{vmatrix} -0,133 & -0,24 \\ -0,067 & 0,6 \end{vmatrix} - 0,16 \cdot \begin{vmatrix} -0,05 & 0,75 \\ -0,067 & -0,325 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,867 \cdot (0,75 \cdot 0,6 - 0,2 \cdot 0,24) +$$

$$+0,15 \cdot (-0,133 \cdot 0,6 - 0,24 \cdot 0,067) - 0,16 \cdot (0,05 \cdot 0,325 + 0,75 \cdot 0,067) \approx 0,3217.$$

Найдем алгебраические дополнения:

$$B_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0,75 & -0,24 \\ -0,2 & 0,6 \end{vmatrix} \approx 0,402,$$

$$B_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,133 & -0,24 \\ -0,067 & 0,6 \end{vmatrix} \approx 0,096,$$

$$B_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,133 & 0,75 \\ -0,067 & -0,2 \end{vmatrix} \approx 0,077,$$

$$B_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,15 & -0,16 \\ -0,2 & 0,6 \end{vmatrix} \approx 0,122,$$

$$B_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0,867 & -0,16 \\ -0,067 & 0,6 \end{vmatrix} \approx 0,509,$$

$$B_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0,867 & -0,15 \\ -0,067 & -0,2 \end{vmatrix} \approx 0,183,$$

$$B_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,15 & -0,16 \\ 0,75 & -0,24 \end{vmatrix} \approx 0,156,$$

$$B_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0,867 & -0,16 \\ -0,133 & -0,24 \end{vmatrix} \approx 0,229,$$

$$B_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0,867 & -0,15 \\ -0,133 & 0,75 \end{vmatrix} \approx 0,63$$

Тогда обратная матрица равна:

$$S = B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{21} & B_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{0,3217} \begin{pmatrix} 0,402 & 0,096 & 0,077 \\ 0,122 & 0,509 & 0,183 \\ 0,156 & 0,229 & 0,630 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,249 & 0,379 & 0,485 \\ 0,298 & 1,583 & 0,713 \\ 0,238 & 0,570 & 1,958 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность расчетов проверкой равенств: $S \cdot B = B \cdot S = E$.

Действительно,

$$(E-A)^{-1} \cdot (E-A) = \begin{pmatrix} 1,249 & 0,379 & 0,485 \\ 0,298 & 1,583 & 0,713 \\ 0,238 & 0,570 & 1,958 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,867 & -0,15 & -0,16 \\ -0,133 & 0,75 & -0,24 \\ -0,067 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$(E-A) \cdot (E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,867 & -0,15 & -0,16 \\ -0,133 & 0,75 & -0,24 \\ -0,067 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,249 & 0,379 & 0,485 \\ 0,298 & 1,583 & 0,713 \\ 0,238 & 0,570 & 1,958 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

4) Для нового вектора конечной продукции

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix}$$

найдем вектор валовой продукции X по формуле $X = S \cdot Y$.

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,249 & 0,379 & 0,485 \\ 0,298 & 1,583 & 0,713 \\ 0,238 & 0,570 & 1,958 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,249 \cdot 250 + 0,379 \cdot 150 + 0,485 \cdot 300 \\ 0,298 \cdot 250 + 1,583 \cdot 150 + 0,713 \cdot 300 \\ 0,238 \cdot 250 + 0,570 \cdot 150 + 1,958 \cdot 300 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 514,712 \\ 525,901 \\ 732,491 \end{pmatrix}.$$