Прикладная математика

Пример решения производственной задачи

Задача. *Для изготовления трех видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, нормы расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.*

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на ед. продукции			Запасы ресурсов
	I вид	II вид	III вид	
Труд	3	6	4	2000
Сырье 1	20	15	20	15000
Сырье 2	10	15	20	7400
Оборудование	0	3	5	1500
Цена изделия	6	10	9	

Требуется:

1. *Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.*
2. *Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.*
3. *Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.*
4. *На основе свойств двойственный оценок и теорем двойственности:*
    - *проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;*
    - *определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запаса ресурса первого вида на 24 единицы;*
    - *оценить целесообразность включения в план изделия четвертого вида ценой 11 единиц, если нормы затрат ресурсов 8, 4, 20 и 6 единиц.*

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи.

Пусть фирма выпускает x_1, x_2, x_3 единиц продукции I, II, III вида соответственно. По смыслу задачи эти переменные неотрицательны: $x_1, x_2, x_3 \ge 0$. Выручка от продажи такого количества продукции составит $F = 6x_1 + 10x_2 + 9x_3$ рублей. По условию выручку нужно максимизировать: $F = 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 \to \max$.

Теперь выпишем ограничения задачи.

Ограничение на использование труда рабочих: $3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 2000$.

Ограничение на использование сырья 1: $20x_1 + 15x_2 + 20x_3 \le 15000$ или $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 3000$.

Ограничение на использование сырья 2: $10x_1 + 15x_2 + 20x_3 \le 7400$ или $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 1480$.

Ограничение на использование оборудования: $0x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 1500$ или $3x_2 + 5x_3 \le 1500$.

Получаем задачу линейного программирования:

$$F = 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 2000, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 3000, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 1480, \\ 3x_2 + 5x_3 \le 1500, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Решим задачу симплекс-методом. Введем дополнительные переменные, чтобы привести задачу к каноническому виду:

$$F = 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 2000, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 3000, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_6 = 1480, \\ 3x_2 + 5x_3 + x_7 = 1500, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$.

Опорный план $X_0 = (0, 0, 0, 2000, 3000, 1480, 1500)$. Составляем симплекс-таблицу:

Базис	**План**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**b_j/a_{ij}**
x4	2000	3	**6**	4	1	0	0	0	2000/6
x5	3000	4	3	4	0	1	0	0	3000/3
x6	1480	2	3	4	0	0	1	0	1480/3
x7	1500	0	3	5	0	0	0	1	1500/3
F	0	-6	-10	-9	0	0	0	0	

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой (x2), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным).

Базис	**План**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**b_j/a_{ij}**
x2	1000/3	1/2	1	2/3	1/6	0	0	0	500
x5	2000	5/2	0	2	-1/2	1	0	0	1000
x6	480	1/2	0	2	-1/2	0	1	0	240
x7	500	-3/2	0	**3**	-1/2	0	0	1	500/3
F	10000/3	-1	0	-7/3	5/3	0	0	0	

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой (x3), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b_j/a_{ij}
x2	2000/9	5/6	1	0	5/18	0	0	-2/9	800/3
x5	5000/3	7/2	0	0	-1/6	1	0	-2/3	10000/21
x6	440/3	**3/2**	0	0	-1/6	0	1	-2/3	880/9
x3	500/3	-1/2	0	1	-1/6	0	0	1/3	-
F	33500/9	-13/6	0	0	23/18	0	0	7/9	

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой (x1), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b_j/a_{ij}
x2	3800/27	0	1	0	10/27	0	-5/9	**4/27**	950
x5	11920/9	0	0	0	2/9	1	-7/3	8/9	1490
x1	880/9	1	0	0	-1/9	0	2/3	-4/9	-
x3	1940/9	0	0	1	-2/9	0	1/3	1/9	1940
F	106220/27	0	0	0	28/27	0	13/9	-5/27	

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой (x7), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b_j/a_{ij}
x7	950	0	27/4	0	5/2	0	-15/4	1	
x5	480	0	-6	0	-2	1	1	0	

x1	520	1	3	0	1	0	-1	0	
x3	110	0	-3/4	1	-1/2	0	3/4	0	
F	4110	0	5/4	0	3/2	0	3/4	0	

В последнем плане строка F не содержит отрицательных значений, план x_1 = 520, x_2 = 0, x_3 = 110 оптимален, целевая функция принимает значение 4110.

Таким образом, чтобы получить максимальную выручку в 4110 рублей необходимо произвести 520 единиц продукции первого вида и 110 единиц продукции третьего вида.

Сформулируем двойственную задачу к основной задаче

$$F = 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 2000, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 3000, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 1480, \\ 3x_2 + 5x_3 \le 1500, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Она имеет вид:

$$W = 2000y_1 + 3000y_2 + 1480y_3 + 1500y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 6, \\ 6y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 3y_4 \ge 10, \\ 4y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 5y_4 \ge 9, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0.$$

Найдем решение двойственной задачи, используя теоремы двойственности и последнюю симплекс-таблицу:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b_j/a_{ij}
x7	950	0	27/4	0	5/2	0	-15/4	1	
x5	480	0	-6	0	-2	1	1	0	
x1	520	1	3	0	1	0	-1	0	
x3	110	0	-3/4	1	-1/2	0	3/4	0	
F	4110	0	5/4	0	**3/2**	**0**	**3/4**	**0**	

На основании теоремы двойственности заключаем, что $W_{\min} = F_{\max} = 4110$. Оптимальный план двойственной задачи запишем по последней строке таблицы, учитывая, что $x_4 \to y_1$, $x_5 \to y_2$, $x_6 \to y_3$, $x_7 \to y_4$. Получим $Y = (3/2, 0, 3/4, 0)$.

В последней строке симплекс-таблицы оптимального плана в столбцах дополнительных переменных находятся двойственные оценки $Y = (3/2, 0, 3/4, 0)$, определяющие дефицитность сырья. Так как $y_1 = 3/2 > 0$, $y_3 = 3/4 > 0$, то согласно второй теореме двойственности сырье 1-го и 3-го типов (труд и сырье 2) полностью используется в оптимальном плане и является дефицитным сырьем. Так как как $y_2 = y_4 = 0$, сырье 2-го и 4-го типов (сырье 1 и оборудование) не используются полностью в оптимальном плане и не являются дефицитным сырьем. Из последней таблицы можно увидеть, что остаток сырья 1-го вида – 480, остаток времени работы оборудования – 950.

Кроме того, значения двойственных оценок показывают, насколько возрастает доход предприятия при увеличении дефицитного сырья на единицу (соответственно, на 3/2 и на 3/4).

Определим максимальный интервал изменения запасов каждого вида сырья, в пределах которого структура оптимального плана, т.е. номенклатура выпуска, не изменится. Другими словами, проведем анализ устойчивости двойственных оценок, определив для каждого типа сырья предельные изменения. Предельные изменения найдем из двойного неравенства:

$$\max_{k_{ij}>0}(-x_j^*/k_{ij}) \le \Delta b_i \le \min_{k_{ij}<0}(-x_j^*/k_{ij})$$

где Δb_i - величина изменения i-го типа сырья,

k_{ij} – коэффициенты структурных сдвигов.

Для первого типа сырья имеем: $k_{17}=5/2$, $k_{15}=-2$, $k_{11}=1$, $k_{13}=-1/2$.

$$\max_{k_{1j}>0}(-950/5\cdot 2,-520/1) \le \Delta b_1 \le \min_{k_{1j}<0}(480/2,110\cdot 2)$$

$-380 \le \Delta b_1 \le 220$. Таким образом, интервал устойчивости двойственной оценки $[b_1-380, b_1+220]=[1620,2220]$.

Поскольку увеличение запаса ресурса первого вида на 24 ($\Delta b_1 = 24$) единицы попадает в интервал $-380 \le \Delta b_1 \le 220$, структура оптимального плана не изменится. Найдем новый оптимальный план:

Базис	План	x4	Изменение	Новый план

x7	950	2,5	60	1010
x5	480	-2	-48	432
x1	520	1	24	544
x3	110	-0,5	-12	98
F	4110	1,5	36	4146

Таким образом, в результате увеличения количества дефицитного ресурса первого вида (труда) на 24 единицы, объем продаж продукции первого вида увеличится на 24 единицы, а третьего типа уменьшится на 12 единиц. Суммарная выручка предприятия увеличится на 36 ден. ед. и составит 4146 ден. ед.

Оценим целесообразность включения в план изделия четвертого вида ценой 11 единиц, если нормы затрат ресурсов 8, 4, 20 и 6 единиц. Используем двойственные оценки:

$3/2\cdot 8+0\cdot 4+3/4\cdot 20+0\cdot 6=17>11$, поэтому такое изменение невыгодно.