

## Прикладная математика

### Пример решения задачи о функции полезности

**Задача.** *Определить набор товаров потребителя  $(x_1, x_2)$ , максимизирующий функцию полезности*

$$U(x_1, x_2) = x_1^c \cdot x_2^d$$

*при заданном бюджетном ограничении.*

*Цены товаров  $p_1, p_2$ , доход (бюджет) потребителя  $m$ , а также параметры  $c$  и  $d$  функции полезности приведены в таблице 8.*

$$p_1 = 7, p_2 = 6, m = 336, c = 7/8, d = 1/8.$$

**Решение.** Задачу потребительского выбора можно представить в виде задачи на условный экстремум:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{7/8} x_2^{1/8} \rightarrow \max$$

при условии (бюджетное ограничение)

$$7x_1 + 6x_2 = 336$$

Для решения задачи применим метод Лагранжа.

Выписываем функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{7/8} x_2^{1/8} + \lambda(7x_1 + 6x_2 - 336),$$

находим ее первые частные производные по  $x_1, x_2, \lambda$  и приравниваем эти частные производные нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{7}{8} x_1^{-1/8} \cdot x_2^{1/8} + 7\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{8} x_1^{7/8} x_2^{-7/8} + 6\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 7x_1 + 6x_2 - 336 = 0,$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{7}{8}x_1^{-1/8}x_2^{1/8} = -7\lambda, \\ \frac{1}{8}x_1^{7/8}x_2^{-7/8} = -6\lambda, \\ 7x_1 + 6x_2 = 336. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{-1/8}x_2^{1/8} = -8\lambda, \\ x_1^{7/8}x_2^{-7/8} = -48\lambda, \\ 7x_1 + 6x_2 = 336. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1^{-1/8}x_2^{1/8} = -48\lambda, \\ x_1^{7/8}x_2^{-7/8} = -48\lambda, \\ 7x_1 + 6x_2 = 336. \end{cases}$$

Приравниваем левые части двух первых уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} 6x_1^{-1/8}x_2^{1/8} &= x_1^{7/8}x_2^{-7/8}, \\ 6(x_2/x_1)^{1/8} &= (x_2/x_1)^{-7/8}, \\ 6 &= x_1/x_2, \\ x_1 &= 6x_2. \end{aligned}$$

Подставляем в третье уравнение и получаем:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 6x_2 + 6x_2 &= 336, \\ 48x_2 &= 336, \\ x_2 &= 7 \end{aligned}$$

Тогда  $x_1 = 6 \cdot 7 = 42$ .

Таким образом, точка  $(x_1, x_2) = (42, 7)$  является решением задачи потребительского выбора: потребитель выберет набор, состоящий из 42 товаров первого вида и 7 товаров второго вида.