

Тема: Несобственный интеграл

ЗАДАНИЕ. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем несобственный интеграл второго рода (функция имеет особенность в точке $x = 0$). Рассмотрим интеграл ($\varepsilon > 0$)

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2} \Big|_{\varepsilon}^1 = \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Тогда по определению

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{1-\varepsilon^2} = 1,$$

то есть интеграл сходится и равен 1.