

Микроэкономика, пример решения задачи Функция Кобба-Дугласа. Максимальный выпуск продукции

ЗАДАНИЕ.

1. Выпуск продукции фирмой описывается функцией Кобба-Дугласа $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$. Ставка заработной платы равна p_L , норма процента на используемый капитал - p_K .
2. По заданному уровню выпуска продукции Y определить объемы факторов K и L , при которых общие издержки будут минимальны, и величину этих издержек.
3. По известной величине общих издержек TC определить объем факторов K и L , обеспечивающие максимальный выпуск продукции, и соответствующий объем выпуска.

Данные: $A = 0,7$, $\alpha = 0,5$, $p_K = 7,5$, $p_L = 29$, $Y = 60$, $TC = 300$

РЕШЕНИЕ.

По условию, выпуск продукции фирмой описывается функцией Кобба-Дугласа $Y = 0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5}$. Ставка заработной платы равна $p_L = 29$, норма процента на используемый капитал - $p_K = 7,5$.

Общие издержки $TC = p_K K + p_L L = 7,5K + 29L$.

По заданному уровню выпуска продукции $Y = 60$ определим объемы факторов K и L , при которых общие издержки будут минимальны, и величину этих издержек.

Получаем следующую задачу минимизации:

$$F = 29L + 7,5K \rightarrow \min,$$

$$0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5} = 60,$$

$$K, L \geq 0.$$

Это нелинейная задача, решаем ее методом множителей Лагранжа. Вводим функцию Лагранжа:

$$\Lambda = 29L + 7,5K - \lambda(0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5} - 60).$$

Вычисляем ее частные производные по K, L, λ и приравниваем к нулю.

Получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial L} = 29 - \lambda \cdot 0,7 \cdot 0,5 L^{-0,5} K^{0,5} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial K} = 7,5 - \lambda \cdot 0,7 \cdot 0,5 K^{-0,5} L^{0,5} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5} - 60 = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему:

$$\begin{cases} \lambda \cdot 0,35 (L/K)^{-0,5} = 29, \\ \lambda \cdot 0,35 (K/L)^{-0,5} = 7,5, \\ 0,7 K^{0,5} \cdot L^{0,5} = 60. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{29}{0,35} (L/K)^{0,5}, \\ \lambda = \frac{7,5}{0,35} (K/L)^{0,5}, \\ K^{0,5} \cdot L^{0,5} = \frac{60}{0,7}. \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} 29 (L/K)^{0,5} = 7,5 (K/L)^{0,5}, \\ \lambda = \frac{7,5}{0,35} (K/L)^{0,5}, \\ K^{0,5} \cdot L^{0,5} = \frac{60}{0,7}. \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$(L/K)^{0,5+0,5} = \frac{7,5}{29},$$

$$L = \frac{75}{290} K.$$

Подставляем в последнее уравнение

$$K^{0,5} \cdot \left(\frac{75}{290} K \right)^{0,5} = \frac{60}{0,7},$$

$$K \approx 168,55.$$

$$\text{Тогда } L = \frac{75}{290} 168,55 \approx 43,59.$$

Величина издержек будет равна $F = 29L + 7,5K = 29 \cdot 43,59 + 7,5 \cdot 168,55 = 2528,208$.

По известной величине общих издержек $ТС$ определим объем факторов K и L , обеспечивающие максимальный выпуск продукции, и соответствующий объем выпуска.

Получаем задачу максимизации:

$$F = 0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5} \rightarrow \max,$$

$$29L + 7,5K = 300,$$

$$K, L \geq 0.$$

Это нелинейная задача, решаем ее методом множителей Лагранжа. Вводим функцию Лагранжа:

$$\Lambda = 0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5} - \lambda(29L + 7,5K - 300).$$

Вычисляем ее частные производные по K, L, λ и приравниваем к нулю.

Получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial L} = 0,7 \cdot 0,5 L^{-0,5} K^{0,5} - 29\lambda = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial K} = 0,7 \cdot 0,5 K^{-0,5} L^{0,5} - 7,5\lambda = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 29L + 7,5K - 300 = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему:

$$\begin{cases} 0,35(K/L)^{0,5} = 29\lambda, \\ 0,35(K/L)^{-0,5} = 7,5\lambda, \\ 29L + 7,5K - 300 = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{0,35}{29}(K/L)^{0,5} = \frac{0,35}{7,5}(K/L)^{-0,5}, \\ 0,35(K/L)^{-0,5} = 7,5\lambda, \\ 29L + 7,5K - 300 = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} (K/L) = \frac{0,35}{7,5} \left(\frac{0,35}{29} \right)^{-1}, \\ 0,35(K/L)^{-0,5} = 7,5\lambda, \\ 29L + 7,5K - 300 = 0. \end{cases}$$

Решение задач по микроэкономике скачано с
https://www.matburo.ru/ex_econ_all.php?p1=micropf

(еще больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{cases} K = 3,867L, \\ 0,35(K/L)^{-0,5} = 7,5\lambda, \\ 29L + 7,5 \cdot 3,867L - 300 = 0. \end{cases}$$

Получаем решение:

$$\begin{cases} K = 20, \\ L = 5,172. \end{cases}$$

При этом максимальный выпуск продукции равен: $F = 0,7 \cdot 20^{0,5} \cdot 5,172^{0,5} \approx 7,12$